T.C. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI NO: 1077
AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINLARI NO: 597

MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

Analitik Geometri

Yazar:
Yrd.Doç.Dr. Nevin MAHİR

Editör:
Doç.Dr. Hüseyin AZCAN

Tasarım: Yrd.Doç.Dr. Kazım SEZGİN

ISBN 975 - 492 - 835 - 5

Başlarken

Kaba bir yaklaşımla geometriye başlamanın temelde iki yolu vardır. Bu yollardan birincisi oldukça soyut bir şekilde aksiyomatik bir sistemden elde edilebilen mantıksal sonuçları berrak bir biçimde ortaya koyup, bu aksiyonların kendi aralarındaki ilişkilerin sistematik şekilde incelenmesidir. Öğrencinin matematiksel şıklık ve güzellikte ilk tanıştığı bu yol, kaba biçimleriyle lise yıllarında sentetik geometri derslerinin konusunu oluşturur. Fakat bu yolun kolay hesap yapabilmeye olanak vermeyişi çok önemli bir dezavantajını oluşturur. Bunun nedeni ise bu yöntemin temel motivasyonunun mantıksal tutarlılık oluşudur. Öklid ile başlayan bu yaklaşım tamamen doğal olması gereken geometriyi (en azından yeni başlayanlar için) çok zor duruma getirmektedir.

Diğer bir yaklaşım ise başlangıçda soyut bir aksiyomatik sistemin kendi içindeki ilişkilerini ve bu ilişkilerin sonuçlarını incelemek yerine, bu aksiyomatik sistemi sağlayan bir modeli alıp, bu modeli uygun bir biçimde işleyip, sonuçları bu modelden elde etmektir. Birinci yöntemin dezanvantajını oluşturan nokta, doğru ve düzlem gibi nesnelerin tanımsız oluşları, bu ikinci yöntem sayesinde giderilebilir. Bu yöntem ise bu kitabın konusunu oluşturan analitik geometridir. Sizin lise yıllarından tanıdığınız gibi düzlemin Öklidyen analitik geometrisinde nokta bir (x, y) sıralı ikilisi, doğru a, b, c gerçel sayılar olmak üzere düzlemde $ax + by + c = 0$ denklemini sağlayan (x, y) sıralı ikililerin kümesi olarak tanımlanır. Bu alışıldık ve evrensel hale gelmiş olan bu tanımlarla Öklid tarafından düzlem geometri için verilen aksiyomları sağlayan bir model oluşturulur. Bu şekilde bir model kullanmanın tek yararı soyut aksiyomları yukarıda verilen örnekteki gibi somutlaştırmak değil, denklemler ve sıralı ikililer sayesinde bir geometri problemini bir cebir ya da analiz problemine çevirmektir. Tersine cebirdeki ya da analizdeki gelişmeler de geometriye yansıyabilir duruma gelmektedir. En önemlisi de bu hesap yapabilme olanağı, ortalama bir öğrenci için, geometriye başlamanın en kestirme yoludur. Başka bir deyişle analitik geometri belki de, bir zamanlar kral Ptolemy'nin Öklid'den umutsuzca istediği geometrinin krallara mahsus kolay bir yoludur.

Adına koordinatlama diyeceğimiz bu (x, y) sıralı ikililerinin kullanımına eski Mısırlılarda, Romalılarda ve Yunanlalarda rastlanır. Sıralı ikililerin arasındaki ilişkileri geometrik olarak ilk defa yorumlayan ise Apollonius'dur. Fakat bugünküne yakın anlamda ilk analitik geometri çalışmaları Nicole Orseme'de görülmektedir. Örneğin, doğru ve düzlem denklemleri Orseme tarafından yazılmıştır. Bugün bilinen anlamda analitik geometrinin temelleri ise Fransız metamatikçileri Rene Descartes ve Pierre de Fermat tarafından atılmıştır.

Doç.Dr. Hüseyin AZCAN
Editör

Düzlem ve Düzlemin Koordinatlanması

ÜNİTE 1

Yazar
Yrd.Doç.Dr. Nevin MAHİR

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Doğrunun ve düzlemin koordinatlanmasını öğrenecek,
- Dik koordinatlarla, paralel koordinatlarla ve kutupsal koordinatlar ile düzlemin koordinatlanmasını kavrayacaksınız.

İçindekiler

Çalışma Önerileri

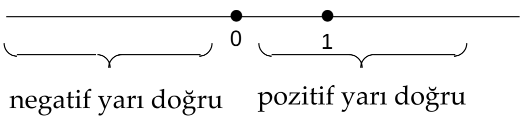
- Bu üniteyi kavrayabilmek için konuyla ilgili lisedeki geometri bilgilerinizi hatırlayınız.

1. Giriş

Sizlerinde daha önceki bilgilerinizden anımsayacağınız gibi geometride nokta, doğru, düzlem gibi kavramlar tanımsızdır. Fakat bu kitapta kavramları somutlaştırabilmek amacıyla bu tanımsız kavramları genel geçer anlamda sezgilendiği gibi kullanacağız. Yani, noktayı sivri bir kalemin tam ucu gibi, doğruyu düz kırılmayan, bükülmeyen bir eğri ve düzlemi ise düz bir yüzey olarak algılayacağız. Bu algılama biçimi, en azından lise yıllarının Öklid geometrisinden tanıdık olduğu için kulağı tırmalayıcı değildir.

2. Bir Doğrunun Koordinatlanması

Bir doğruyu koordinatlamak, lise yıllarından iyi bilinen düşünsel bir sayı doğrusundan başka bir şey değildir. Anımsayacak olursak, bir l doğrusu alıp, gerçel sayıları bu doğru üzerine yerleştirelim. Öncelikle sıfırı yerleştirilmesiyle doğruyu iki parçaya ayırmış oluruz. Bir sayısını yerleştirdiğimiz yarı doğruya, pozitif yarı doğru, diğerine negatif yarı doğru diyelim.



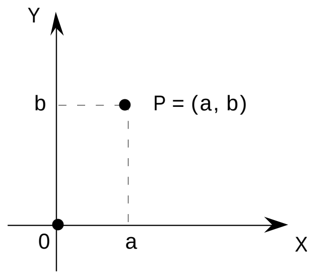
Şekil 1.1:

Diğer gerçel sayılarıda doğru üzerine bire-bir ve doğruyu tamamen dolduracak şekilde yerleştirelim. Öyleki, bu yerleştirme esnasında sıralanma korunsun. Yani, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ için $x_1 > x_2$ ise sayı doğrusu üzerinde x_1, x_2 nin sağında olsun. İnşadan dolayı bu yerleştirme işlemi bire-bir ve örtendir.

Şimdi, doğru üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığı da, bu noktalara karşılık getirilen gerçel sayıların farklarının mutlak değeri olarak tanımlayalım. Bu sayı doğrusu koordinatlamasını kullanarak tümel bir şekilde yüksek boyutlu uzayların koordinatlaması da yapılabilir.

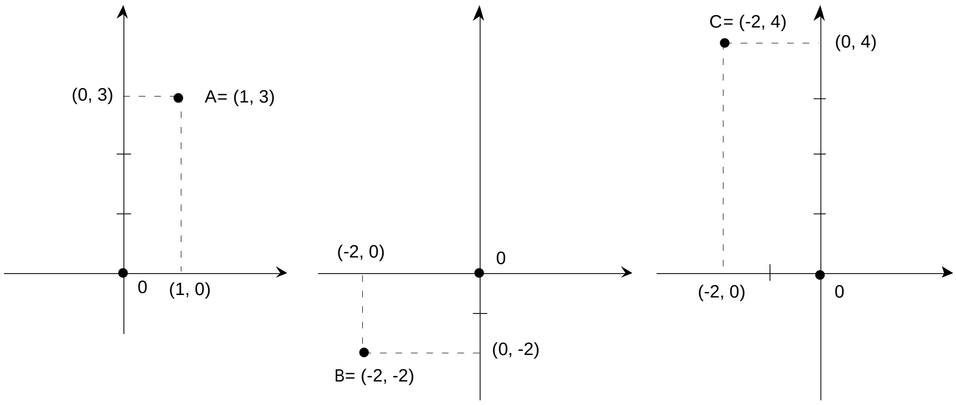
3. Düzlemin Koordinatlanması

Düzlemde birbirine dik durumlu iki doğru alalım. Bu doğrulardan birini X-ekseni (yatay doğru), diğerini Y-ekseni (dikey doğru), arakesit noktasını da başlangıç noktası olarak adlandıralım. X ve Y (sayı) eksenlerini başlangıç noktası her iki eksende de sıfırı temsil edecek şekilde koordinatlayalım. Bu durumda, düzlemde alınan bir P noktasına, bir (a, b) sıralı ikilisi karşılık getirebilir. Burada a ise P noktasında Y-eksenine çizilen paralelin X-sayı doğrusunu kestiği noktaya karşılık getirilen gerçel sayının değeri, benzer şekilde, b ise P noktasında X-eksenine çizilen paralelin Y-sayı doğrusunu kestiği noktaya karşılık getirilen gerçel sayının değeridir.



Şekil 1.2:

Bu a gerçel sayına P noktasının apsisi, b gerçel sayısına P noktasının ordinatı denir. Tutarlılığı sağlamak için X-ekseni üzerindeki x gerçel sayısına (x, 0) sıralı ikilisi ile Y-ekseni üzerindeki y gerçel sayısına (0, y) sıralı ikilisini karşılık getirelim. Kolayca görebiliriz ki her sıralı ikiliye düzlemde bir nokta karşılık getirilir.

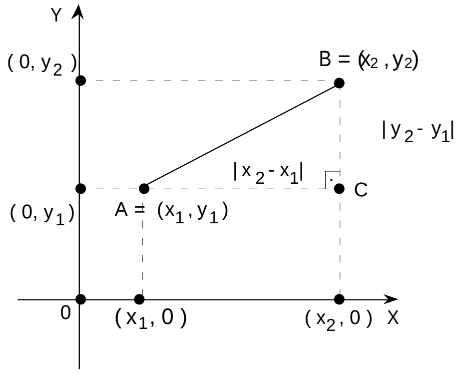


Şekil 1.3:

Son olarak gerçel sayılardaki gibi burada da yön kavramı tanımlanabilir. Bu konuya daha sonra değinilecektir. Fakat, tersi belirtilmedikçe düzlemin yönlendirilmesi sayı doğruların yukarıdaki örneklerde görülen yönlendirilmeleri sonucu oluşacak yönlendirmeyi kullanacağız (standart yönlendirme).

4. İki Nokta Arasındaki Uzaklık

A ve B noktaları için, AB doğru parçasının uzunluğuna, A ve B noktaları arasındaki uzaklık denir. Koordinatları A= (x_1 , y_1) ve B= (x_2 , y_2) olan iki nokta arasındaki uzaklığı Şekil 1.4. den yararlanarak bulalım.



Şekil 1.4:

A ve B noktalarının koordinatları gözönüne alınırsa, oluşan ABC dik üçgeninde, $|AC| = |x_2 - x_1|$, $|BC| = |y_2 - y_1|$ ve Pisagor teoremi kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
|AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 \\
&= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2
\end{aligned}
$$

dir. Her iki tarafın karekökü alınarak, $|AB| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$ elde edilir.

4.1. Örnek

Düzlemde dik koordinatları A=(1 , -3) ve B=(3 , 5) olarak verilen noktaların arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm

İki nokta arasındaki uzaklık

$$|AB| = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

formülünde, koordinatlar yerine konularak,

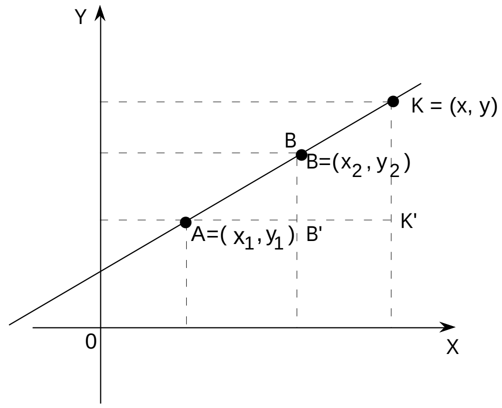
$$|AB| = \sqrt{|3 - 1|^2 + |5 - (-3)|^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ bulunuı}$$

5. İki Noktadan Geçen Doğru Denklemi

A= (x_1 , y_1) ve B= (x_2 , y_2) noktalarının koordinatlarına göre, üç farklı durum vardır.

1. Durum

$x_1 \neq x_2 \quad y_1 \neq y_2$ olması durumunda,



Şekil 1.5:

Şekil 1.5. den görüldüğü gibi ABB', AKK' üçgenlerinin benzerliğinden,

$$\frac{|KK'|}{|K'A|} = \frac{|BB'|}{|B'A|}$$

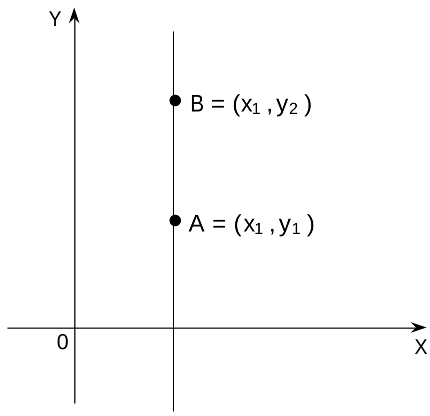
dır. Buna göre,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

elde edilir.

2. Durum

$x_1 = x_2$ ve $y_1 \neq y_2$ olması durumunda,



Şekil 1.6:

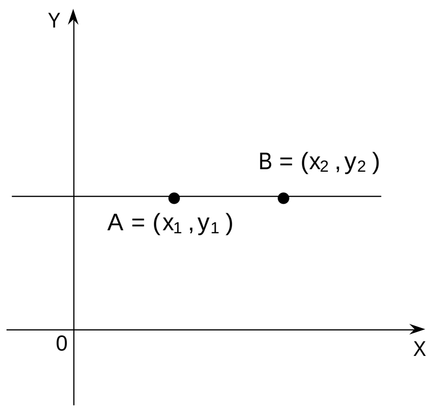
Şekil 1.6. den görüldüğü gibi bu iki noktadan geçen doğru Y-eksenine paralel doğrudur. Bu doğru üzerindeki bütün noktaların apsisi x_1 e eşittir. O halde bu doğrunun denklemi

$$x = x_1$$

olur.

3. Durum

$x_1 \neq x_2$ ve $y_1 = y_2$ olması durumunda, birinci durumdan $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ denklemindey $y_1 = y_2$ yazılırsa,



Şekil 1.7:

$$y = y_1$$

denklemi bulunur.

5.1. Örnek

A= (-1 , 3) ve B= (4 , -2) noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm

Düzlemde farklı iki noktadan geçen doğru denklemi:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

olduğundan, A ve B noktalarının koordinatları yerine konulursa,

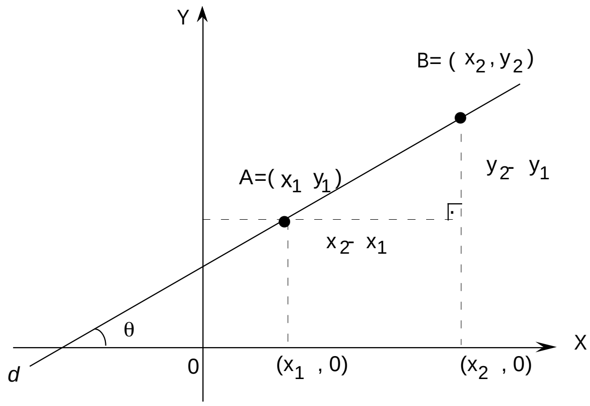
$$\frac{y - 3}{x - (-1)} = \frac{-2 - 3}{4 - (-1)}$$

$$\frac{y - 3}{x + 1} = \frac{-5}{4 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y - 3}{x + 1} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad y = -(x + 1) + 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 2$$

bulunur.

Tanım

Bir doğrunun üst yarı düzlemde X-ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının tanjantına o doğrunun eğimi denir.



Şekil 1.8:

Şekil 1.8. den görüldüğü gibi A= (x_1 , y_1) ve B = (x_2 , y_2) noktalarından geçen *d* doğrusun eğimi için,

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

formülü elde edilir. A= (x_1 , y_1) noktasından geçen ve eğimi m olan bir doğrunun denklemi:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{formülünde} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ kullanılarak}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

elde edilir.

5.2. Örnek

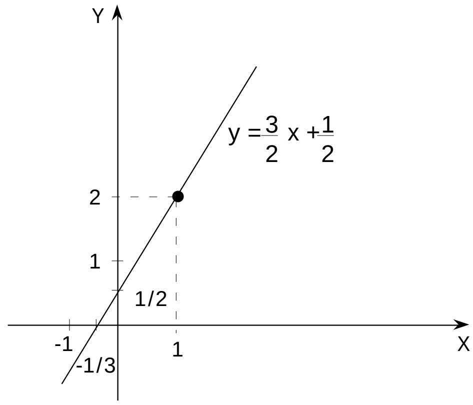
A = (1, 2) noktasından geçen ve eğimi $\frac{3}{2}$ olan doğrunun denklemini bulunu

Çözüm

Verilen bir noktadan geçen ve eğimi belli olan doğru denklemine göre

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

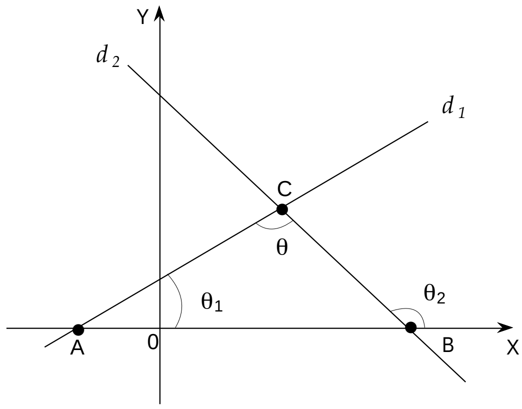
bulunur. Aşağıda grafiği verilmiştir.



Şekil 1.9:

6. İki Doğru Arasındaki Açı

Eğimleri $m_1 = \tan\theta_1$ ve $m_2 = \tan\theta_2$ olan d_1 ve d_2 doğruları verilsin. Keşişen bu iki doğru arasındaki açının tanjantı



Şekil 1.10:

Şekil 1.10. dan

$$\tan\theta = \tan(\pi - (\theta_1 + \pi - \theta_2)) = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

bulunur. Böylece,

$$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + \tan\theta_2 \,.\, \tan\theta_1}$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \,.\, m_1}$$

d_1 ve d_2 doğruları arasındaki açının tanjantını verir.

Herhangi iki doğrunun birbirine göre durumları, yani birbirine göre paralel olma, dik olma veya herhangi bir açıyla kesiştiklerine, bu iki doğrunun eğimlerinden karar verilebilir.

Özel olarak,

1) $m_1 = m_2$ ise , $\tan\theta = 0$ dır. $0 \leq \theta < \pi$ olduğundan $\theta = 0$ dir. Bu durumda, verilen iki doğru ya paralel ya da çakışıktır.

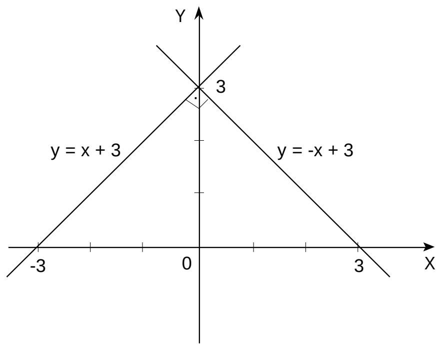
2) $m_1 \,.\, m_2 = -1$ ise , $\tan\theta$ tanımsız ve $\theta = \pi/2$ dir. Bu durumda, iki doğru birbirine diktir.

6.1. Örnek

$x - y + 3 = 0$ ve $3y + 3x - 9 = 0$ doğruları arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm

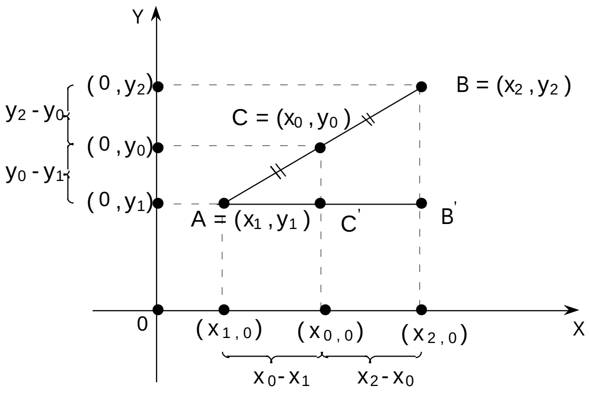
Verilen doğrular, $y = x+3$ ve $y = -x + 3$ şeklinde yazılırsa, bu doğruların eğimlerinin $m_1 = 1$ ve $m_2 = -1$ olduğu görülür. $m_1 \,.\, m_2 = 1.(-1) = -1$ den bu iki doğru arasındaki açı 90° dir. Yani bu doğrular birbirine diktir (Şekil 1.11).



Şekil 1.11

7. Bir Doğru Parçasının Orta Noktası

$A = (x_1 , y_1)$, $B = (x_2 , y_2)$ olmak üzere AB doğru parçasının orta noktası, $|AC| = |CB|$ koşuluna uyan $C = (x_0 , y_0)$ noktasıdır.



Şekil 1.12

Şekil 1.12. de ACC' ve ABB' üçgenlerinin benzerliğinden yararlanarak;

$$\frac{|AC'|}{|AB'|}=\frac{|CC'|}{|BB'|}=\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{1}{2} \quad \text{yani}$$

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}=\frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_1}=\frac{1}{2} \quad \text{den}$$

$$C=(x_0\ ,\ y_0)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

elde edilir.

7.1 Örnek

Uç noktaları A= (-1 , 2) ve B= (4 , 3) olan AB doğru parçasının orta noktasını bulunuz.

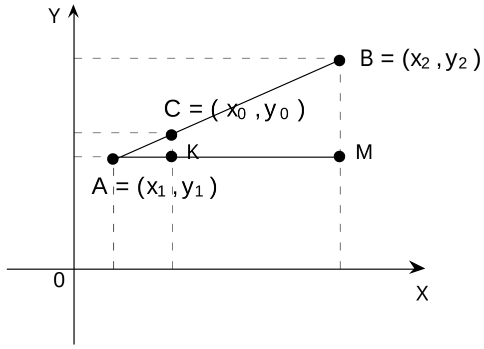
Çözüm

$$C=(x_0\ ,\ y_0)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-1+4}{2},\frac{2+3}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

8. Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda Bölen Nokta

A= (x_1 , y_1) , B= (x_2 , y_2) noktalarından geçen AB doğru parçasını alalım. $|AC| = \lambda\, |CB|$ eşitliğini sağlayan C noktasına, AB doğru parçasını λ oranında bö-len nokta denir. Şimdi bu noktanın koordinatlarını araştıralım.



Şekil 1.13:

$|AC| = \lambda\, |CB| \Leftrightarrow \dfrac{|AC|}{|CB|} = \lambda$ dir. Üçgen benzerliğinden yararlanarak

Şekil 1.13. den $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{|AK|}{|KM|}$ ve $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{|KC|}{|MB|}$ den

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \lambda \quad \text{ve} \quad \frac{y_0 - y_1}{y_2 - y_0} = \lambda$$

yazabiliriz.

$\dfrac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \lambda$ eşitliğinden

$x_0 - x_1 = \lambda\,(x_2 - x_0)$

$x_0(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$

Benzer şekilde

$\dfrac{y_0 - y_1}{y_2 - y_0} = \lambda$ eşitliğinden $y_0 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ elde edilir.

Böylece,

$$C = (x_0\,,\, y_0) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\;,\; \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)$$

dır.

8.1. Örnek

A= (4 , -2) ve B= (-1 , -4) noktaları verilsin. AB doğru parçasını $|AC| = \frac{1}{4}|CB|$ oranında bölen C noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

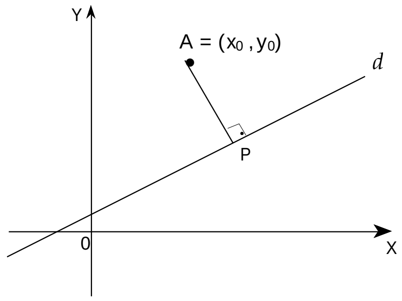
$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{4 + \frac{1}{4}(-1)}{1+\frac{1}{4}} = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{5} = 3$$

$$y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{-2 + \frac{1}{4}(-4)}{1+\frac{1}{4}} = \frac{-3}{\frac{5}{4}} = \frac{-12}{5}$$

$$C = (x_0 , y_0) = \left(3 , \frac{-12}{5}\right)$$

9. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Bir $A = (x_0 , y_0)$ noktasının $d : ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı bu A noktasından d doğrusuna inilen dikmenin uzunluğu olarak tanımlanır.



Şekil 1.14:

Bu uzaklık Şekil 1.14. den görüldüğü gibi, $|PA|$ dır. A ile P noktaları arasındaki uzaklığı bulmak için önce P noktasının koordinatlarını bulalım.

$ax + by + c = 0$ doğrusunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ dir. Bu doğruya dik olan PA doğrusunun eğimi ise $m = \frac{b}{a}$ dır. PA doğrusunun eğimi ve bir noktası bilindiğinden bu doğrunun denklemi,

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

dır. AP doğrusu ile $ax + by + c = 0$ doğrusunun ortak noktası,

$$ax + by + c = 0$$
$$bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0$$

iki bilinmeyenli doğrusal denklemlerin çözümü olan

$$P = (x\,,\,y) = \left(\frac{b^2 x_0 - ab y_0 - ac}{a^2 + b^2}\,,\, \frac{a^2 y_0 - ab x_0 - bc}{a^2 + b^2} \right)$$

dır.

Buradan A ve P noktaları arasındaki uzaklık hesaplanırsa

$$d = |PA| = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

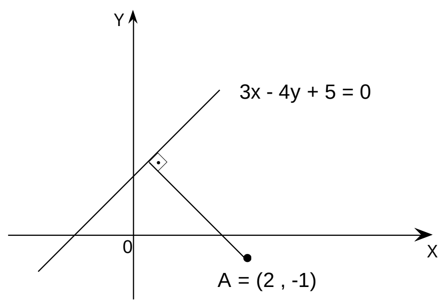
elde edilir.

9.1. Örnek

A= (2 , -1) noktasının $3x - 4y + 5 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı bulunuz.

Çözüm

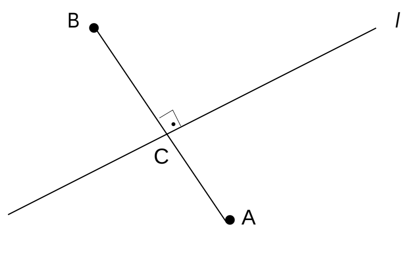
$$d = \frac{|3\,.\,2 - 4(-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ birimdir.}$$



Şekil 1.15:

10. Bir Noktanın Bir Doğruya Göre Simetriği

Düzlemde A ve B noktaları verilsin.

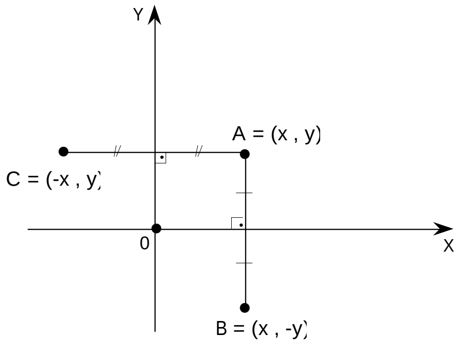


Şekil 1.16:

A ve B noktalarından geçen doğru parçası ile verilen l doğrusunun dik olarak kesiştikleri C noktası, AB doğru parçasının orta noktası ise A ve B noktalarına l doğrusuna göre simetriktir denir. Şimdi, bazı özel doğrulara göre verilen noktanın simetriğini bulalım.

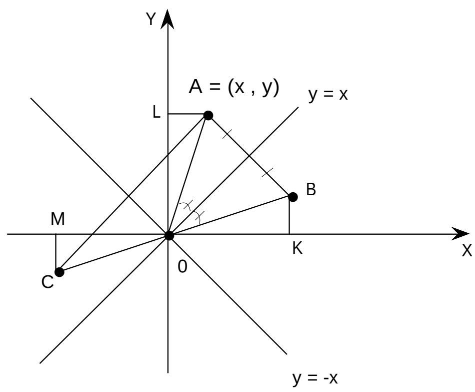
a) A= (x , y) noktasının, X-eksenine göre simetriği B= (x , -y) dir.

b) A= (x , y) noktasının, Y-eksenine göre simetriği C= (-x , y) dir.



Şekil 1.17:

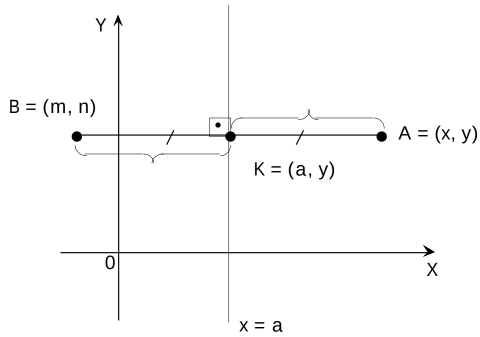
c) A= (x , y) noktasının açıortay doğrularına göre simetriği



Şekil 1.18:

Şekil 1.18. den OCM , OKB , OAL üçgenleri benzerdir. Buna göre, A= (x, y) noktasının noktasının y = x doğrusuna göre simetriği B= (y, x) , y = -x doğrusuna göre simetriği C= (-y, -x) noktalarıdır.

d) x = a doğrusuna göre simetri:



Şekil 1.19

Şekil 1.19. da K noktası bir orta nokta olduğundan, bu noktanın koordinatlarını kullanarak,

$$a = \frac{x + m}{2} \quad \Rightarrow \quad 2a = x + m \quad \Rightarrow \quad m = 2a - x$$

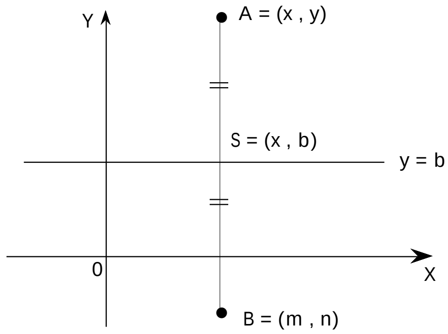
$$y = \frac{y + n}{2} \quad \Rightarrow \quad 2y = y + n \quad \Rightarrow \quad n = y$$

A= (x , y) noktasının x = a doğrusuna göre simetriğini

B= (m , n) = (2a - x , y)

elde ederiz.

e) y = b doğrusuna göre simetri:



Şekil 1.20

d şıkkında olduğu gibi S noktası AB nin orta noktasıdır (Şekil 1.20).

$$x = \frac{x + m}{2} \quad \Rightarrow \quad m = x \quad , \quad b = \frac{y + n}{2} \quad \Rightarrow \quad n = 2b - y$$

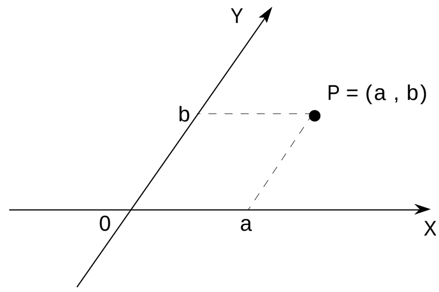
Yani

B = (m , n) = (x , 2b - y)

bulunur.

11. Paralel Koordinatlar

Düzlemde, bir 0 başlangıç noktasında, herhangi bir açı ile kesişen iki doğru alalım. Bu doğrulardan birinin pozitif yönü sağa doğru, diğerinin pozitif yönü ise yukarıya doğru olsun.



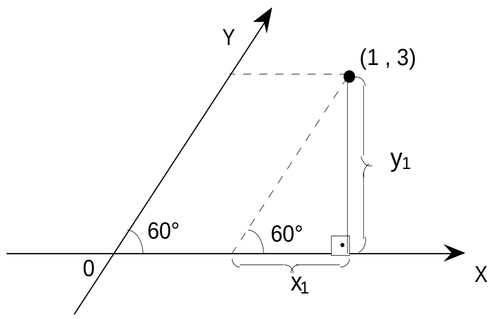
Şekil 1.21:

Sırasıyla birinci doğruya X-ekseni, ikinci doğruya ise Y-ekseni diyelim. Düzlemde bir P noktası verilsin. Bu P noktasından eksenlere paralel doğrular çizelim. Paralel doğruların X ve Y eksenleri kestiği noktalardan orijine olan uzaklıklara karşı gelen sayılar sırasıyla a ve b olsun. Böylece, P noktasına (a , b) sıralı ikilisi karşılık getirilmiş olur. Buna göre, dik koordinatlardaki gibi paralel koordinatlarla, düzlemin noktalarıyla, $\mathbf{R}^2$ kümesinin elemanları birebir örten bir biçimde eşlenmiş olur.

11.1. Örnek

Koordinat eksenleri arasındaki açı 60° olan bir paralel koordinat sisteminde (1 , 3) noktasının, aynı başlangıç noktasına sahip ve X eksenleri çakışan bir dik koordinat sistemindeki koordinatları bulunuz.

Çözüm



Şekil 1.22:

Paralel koordinatları (1 , 3) olan noktanın dik koordinatları (a , b) olsun. (a , b) dik koornidatlarını bulmak için, Şekil 1.22. de görüldüğü gibi dik üçgenden yararlanacağız. Bu dik üçgenin dik kenarları

$$\cos 60 = \frac{x_1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{x_1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3}{2}$$

$$\sin 60 = \frac{y_1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y_1}{3} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

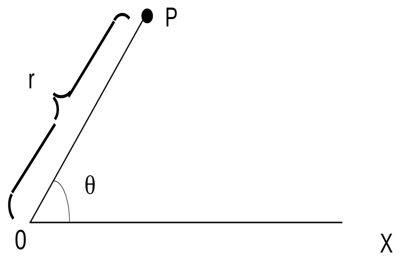
olarak bulunur. O halde,

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 + x_1 = 1 + \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2} \\ b = y_1 \qquad\qquad\quad \Rightarrow b = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \quad (a\ ,\ b) = \left(\frac{5}{2}\ ,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

dir.

12. Kutupsal Koordinatlar

Dik koordinat ve paralel koordinatlarda olduğu gibi, burada da düzlemin noktaları ile sıralı gerçel sayı ikilileri arasında bir eşleme yapacağız. Düzlemde kutup adını vereceğimiz ve 0 ile göstereceğimiz herhangi bir başlangıç noktası seçelim. Kutup noktasında yatay sağa doğru ve kutupsal eksen adını vereceğimiz 0X yarı doğrusunu çizelim. (Şekil 1.23)



Şekil 1.23:

$P \neq 0$ olmak üzere, P nin başlangıç noktasına olan uzaklığı r ve saatin dönme yönünün tersine yönlendirilmiş $X0P$ açısını θ ile gösterelim. Böylece θ açısı ve r yardımıyla P noktasına $(r\ ,\ \theta)$ ikilisi karşılık getirmiş oluruz. Bu $(r\ ,\ \theta)$ ikilisine, P noktasının kutupsal koordinatları denir.

Buna göre, düzlemdeki bir noktaya, k herhangi bir tam sayı olmak üzere $(r\ ,\ \theta + 2k\pi)$ ikilileri kutupsal koordinat olarak karşılık getirilir. Bu tanımdan, bir noktanın birden fazla sayıda kutupsal koordinatı vardır. Örneğin,

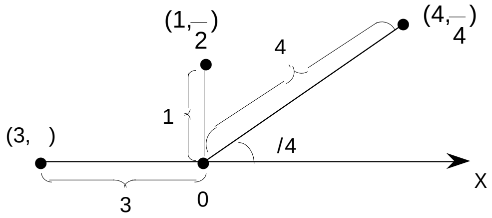
$\left(4\ ,\ \frac{\pi}{6}\right)$, $\left(4\ ,\ 7\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(4\ ,\ -5\frac{\pi}{6}\right)$ aynı noktanın kutupsal koordinatlarıdır. Eğer, r >

$0 \leq \theta < 2\pi$ olacak şekilde r ve θ nın değişim aralığı sınırlı alınırsa, başlangıç noktasından farklı P noktasına tek türlü $(r\ ,\ \theta)$ ikilisi karşılık getirilmiş olur. Özel olarak 0 başlangıç noktasını (0, 0) olarak koordinatlayalım.

12.1. Örnek

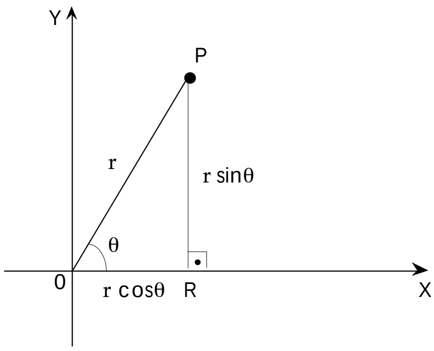
$$(3\,,\pi)\quad,\quad\left(4\,,\frac{\pi}{4}\right)\quad,\quad\left(1\,,\frac{\pi}{2}\right)$$

kutupsal koordinatlarıyla verilen noktaları düzlemde işaretleyiniz.



Şekil 1.24:

Bir dik koordinat sisteminde, 0 başlangıç noktasını kutup, X-eksenini ise kutupsal eksen olarak alınabilir. Buna göre, bir noktanın dik koordinatlarıyla, kutupsal koordinatları arasında,



Şekil 1.25:

Şekil1.25. de görüldüğü gibi ORP dik üçgeninde

$$\begin{Bmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{Bmatrix}$$

bağıntıları vardır.

12.2. Örnek

Kutupsal koordinatları $A = \left(2\,,\frac{\pi}{3}\right)$ olan noktanın, dik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm

$$r = 2 \quad \text{ve} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Kutupsal koordinatları $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ olan noktanın dik koordinatları $(1, \sqrt{3})$ dür

13. Çözümlü Problemler

13.1. A= (-2 , 4) noktasından 3 birim uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm

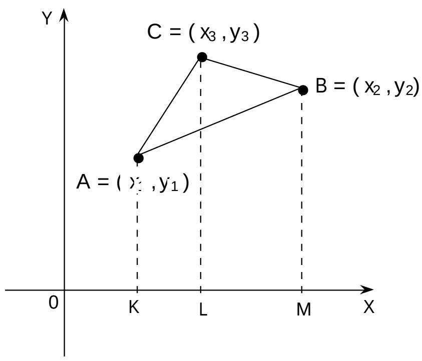
Geometrik yere ait bir nokta B = (x , y) olsun. Bu durumda,

$$|AB| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = 3$$

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 9$$

bulunur.

13.2. Köşeleri A= (x_1, y_1) B= (x_2, y_2) ve C= (x_3, y_3) olan ABC üçgeninin alanını bulunuz.



Şekil 1.26:

Çözüm

AKLC yamuğu ile CLMB yamuğunun alanlarının toplamından AKMB yamuğun alanı çıkarılırsa, ABC üçgeninin alanı elde edilir.

AKLC yamuğun alanı $= \frac{1}{2} (y_1 + y_3)(x_3 - x_1)$

CLMB " " $= \frac{1}{2} (y_3 + y_2)(x_2 - x_3)$

AKMB " " $= \frac{1}{2} (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$

Böylece, ABC üçgeninin alanı

$$S = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

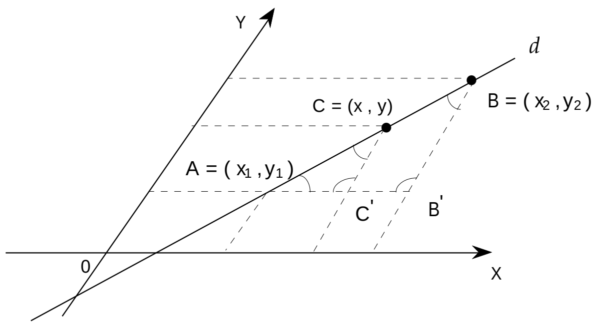
$$= \frac{1}{2}[y_1 x_3 - y_3 x_1 + y_3 x_2 - y_2 x_3 + y_2 x_1 - y_1 x_2]$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

bulunur.

13.3. Eksenler arasındaki açı 60° olan paralel koordinat sistemiyle donatılan bir düzlemde $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm



şekil 1.27:

Şekil 1.27. da görüldüğü gibi A ve B noktalarından geçen *d* doğrusu üzerinde $C = (x, y)$ temsilci nokta alalım. Buna göre,

$$\frac{|AC'|}{|CC'|} = \frac{|AB'|}{|BB'|} \Rightarrow \frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

doğru denklemini elde ederiz.

13.4. Kutupsal koordinat sisteminde $r = 2$ denklemiyle verilen eğriyi dik koordinat sisteminde yazınız.

Aynı başlangıç noktasına sahip olan ve X-ekseni ile kutupsal ekseni çakışan dik ve kutupsal koordinatlar arasında,

$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\}$ bağlantılarından elde edilen $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ifadesini kullanarak

$\sqrt{x^2+y^2} = 2$

dir.

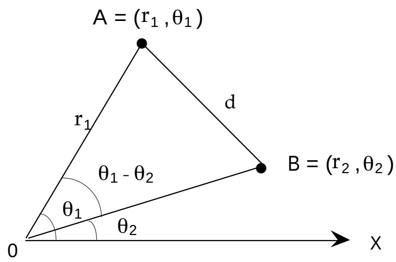
Her iki tarafın karesi alınırsa

$x^2 + y^2 = 4$

denklemi bulunur.

13.5. Kutupsal koordinatlardan $A = (r_1, \theta_1)$, $B = (r_2, \theta_2)$ noktaları arasındaki uzaklık formülünü bulup, sonuç olarak $N = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ $M = \left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm



şekil 1.28:

A ve B noktaları arasındaki uzaklığa d diyelim. Şekil 1.28. da AOB üçgenine kosinüs teoremini uygulayacak olursak,

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\,r_1\,.\,r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$|AB| = d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\,r_1\,.\,r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

formülünü elde ederiz. Buradan,

$$|NM| = \sqrt{2^2 + 4^2 - 2\,.\,2\,.\,4\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{20 - 8\sqrt{3}} \quad \text{birim}$$

bulunur.

Değerlendirme Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını seçenekler arasından bulunuz.

1. A = (3 , 2) , B = (-2 , 5) noktalarından geçen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   A. $3x - y - 7 = 0$
   B. $5y + 3x - 19 = 0$
   C. $y + 3x - 11 = 0$
   D. $3x + y - 7 = 0$
   E. $3x + 5y + 1 = 0$

2. Düzlemde, A = (-4 , -1) B = (3 , 5) noktaları arasındaki uzaklık aşağıdakilerdenhangisidir?
   A. $\sqrt{17}$
   B. $\sqrt{27}$
   C. $\sqrt{37}$
   D. $\sqrt{65}$
   E. $\sqrt{85}$

3. Düzlemde A = (2 , 3) noktası veriliyor. X-eksenine uzaklığı A noktasına olan uzaklığının karesine eşit olan noktaların geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   A. $x^2 + y^2 - 4x + 7y + 13 = 0$
   B. $x^2 + y^2 - 5x - 6y + 13 = 0$
   C. $x^2 + y^2 + 4x - 7y + 13 = 0$
   D. $x^2 + y^2 - 4x - 7y + 13 = 0$
   E. $x^2 + y^2 - 3x - 6y + 13 = 0$

4. Kutupsal koordinatlarda $r = 2\sin\theta - \cos\theta$ eğrisinin dik koordinat sistemindeki denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   A. $\sqrt{x^2 + y^2} - 2x + y = 0$
   B. $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$
   C. $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$
   D. $\sqrt{x^2 + y^2} - 2y + x = 0$
   E. $x^2 + y^2 - \sqrt{2y} + \sqrt{x} = 0$

5. $x^2 - y^2 = 9$ eğrisinin kutupsal koordinat sistemindeki denklemi nedir?
   A. $r^2 \cos 2\theta = 9$
   B. $r^2 \sin 2\theta = 9$
   C. $4r^2 \cos 2\theta = 9$
   D. $4r \sin 2\theta = 9$
   E. $r^2 = 9$

6. Kutuptan geçen ve merkezi kutupsal eksen üzerinde bulunan 3 birim yarıçaplı çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   A. $r = 6 \sin\theta$
   B. $r^2 = 6 (\sin\theta + \cos\theta)$
   C. $r = 6 \cos\theta$
   D. $r^2 = 6 \cos\theta$
   E. $r^2 = 6 \sin\theta$

7. $A = (-3 , 4)$ noktasının kutupsal koordinatları nedir?
   A. $(5 , \tan^{-1} (- 4/3))$
   B. $(5 , \tan (- 4/3))$
   C. $(2 , \tan^{-1} (- 3/4))$
   D. $(5 , \tan^{-1} (- 3/4))$
   E. $(5 , \tan (- 3/4)$

8. Aşağıda verilen doğru çiftlerinden hangisi paralel iki doğru değildir?
   A. $x = 2$
      $x = 3$
   B. $x - y =5$
      $x + y = - 5$
   C. $y = x - 2$
      $x = y + 2$
   D. $3y = x + 5$
      $y = \frac{x}{3}$
   E. $- 2x + y = - 5$
      $- y = - 2x - 10$

9. Dik koordinatları $A = (3 , 4)$ olan bir nokta veriliyor. Eksenler arasındaki açı 45° olan bir paralel koordinat sisteminde A noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?
   A. $(\sqrt{6} , 1)$
   B. $(1 , 6)$
   C. $(- 1 , 6)$
   D. $(1 , \sqrt{32})$
   E. $(- 1 , \sqrt{32})$

10. $A = (1 , c)$ noktasının $3x + 4y - 3 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı $\frac{12}{5}$ birim ise c nin değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?
   A. 0
   B. - 1
   C. 2
   D. - 3
   E. 4

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. B 2. E 3. D 4. C 5. A 6. C 7. A 8. B 9. E 10. D