Uzayda Dik Koordinatlar

ÜNİTE 2

Yazar

Yrd.Doç.Dr. Nevin MAHİR

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Öklid Uzayında Dik Koordinatları öğrenecek,
- Düzlemde Homogen Koordinatları tanıyacaksınız.

İçindekiler

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi kavrayabilmek için, önceki ünitenin anlaşılmış olması gerekir.

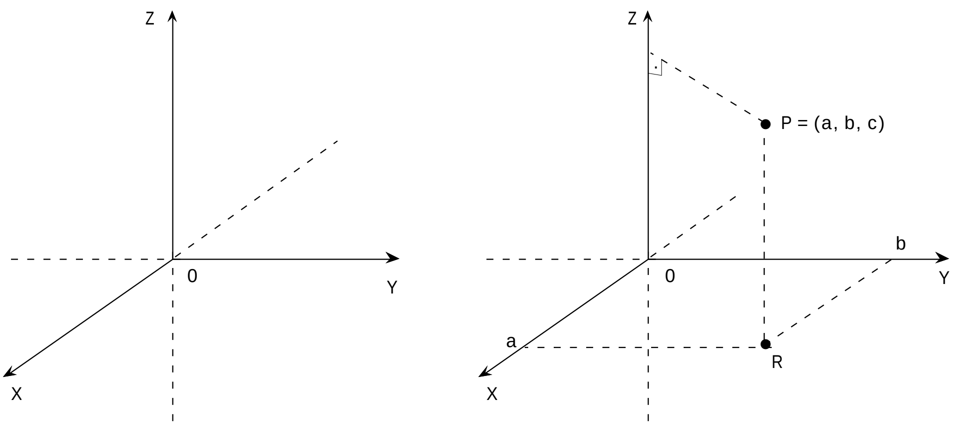
1. Öklid Uzayında Dik Koordinatlar

Bu bölümde, uzaydaki noktalar ile sıralı gerçel sayı üçlüleri, yani;

$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{ (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R} \}$$

kümesinin elemanları arasında birebir eşleme kurulacak. Böylece, uzayda bir noktaya gerçel sayı üçlülerini karşılık getirerek, cebirin ve analizin yöntemleri geometri problemlerinin çözümü için kullanılabilir hale gelecek.

Uzayda bir 0 başlangıç noktası ve bu noktadan geçen birbirini dik kesen üç doğru alalım. Sayı doğrusu olan bu eksenleri X- , Y- , Z- eksenleri olarak adlandıralım. Bu eksenlerin yerleşimi, pozitif ve negatif gerçel sayıları (uygun bir seçimle) Şekil 11.1 deki gibi işaretleyelim.



Şekil 2.1.

X- ve Y- eksenlerinin belirledikleri düzleme XY- düzlemi, X- ve Z- eksenlerinin belirledikleri düzleme XZ- düzlemi ve son olarak Y- ve Z- eksenlerinin belirledikleri düzleme YZ- düzlemi denir. Ayrıca bu üç düzleme koordinat düzlemleri adı verilir.

Şimdi, uzayda bir P noktası alarak, bu noktaya gerçel sayılardan oluşan bir (a , b , c) üçlüsünü aşağıdaki şekilde karşılık getirelim. P noktasından XY- düzlemine bir dik çizelim ve bu dik doğrunun düzlemi kestiği nokta R olsun. XY- düzleminde R noktasından X- ve Y- eksenlerine çizilen paralel doğruların, eksenleri kestiği noktalara karşılık gelen sayılar a ve b olsun. Son olarak P noktasından Z- eksenine dik doğru çizelim. Bu dik doğrunun Z- ekseninin kestiği noktaya karşı gelen sayı c olsun. Böylece, elde edilen a , b , c gerçel sayılarıyla (a, b , c) sıralı üçlüsünü, P noktasına karşılık getirmiş oluruz (Şekil 2.1).

Karşıt olarak, (a , b , c) gibi bir gerçel sayı üçlüsünü alalım. X- ekseninde a sayısına karşılık gelen noktayı ve Y- ekseninde b sayısına karşı gelen noktayı belirleyelim.

XY- düzleminde, a noktasından Y- eksenine ve b noktasından X- eksenine paralel doğru çizelim. Bu paralel doğruların kesiştikleri nokta R olsun. R noktasından XY-düzlemine dik olan doğru ile Z- ekseninde c sayısına karşılık gelen noktadan çizilen dik doğrulardan bir tanesi P diyeceğimiz bir noktada kesişir. Buna göre (a, b, c) gerçel sayı üçlüsüne uzayda bir P noktası karşılık getirmiş oluruz. Tutarlılığı sağlamak için X- ekseni üzerindeki noktalara $(x, 0, 0)$, Y- ekseni üzerindeki noktalara $(0, y, 0)$ ve Z- ekseni üzerindeki noktalara $(0, 0, z)$ üçlülerini karşılık getirelim.

Böylece, uzayın noktaları ile

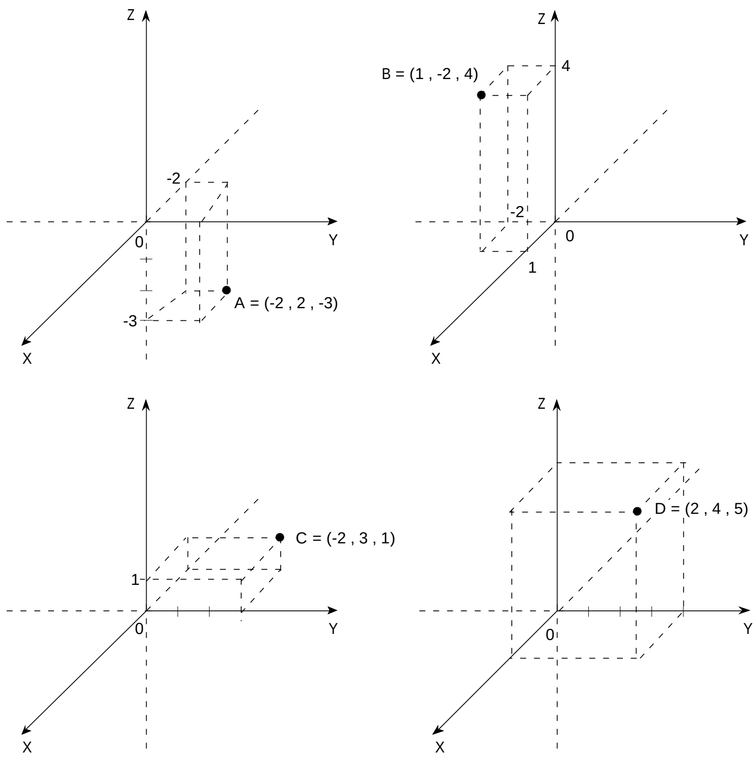
$$\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{ (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R} \}$$

kümesinin elemanları arasında birebir eşleme kurulmuş olur. 0 başlangıç noktası ve koordinat eksenleriyle oluşan sisteme dik koordinat sistemi veya kartezyen koordinat sistemi denir. $P = (a, b, c)$ de a, b, c sayılarına P noktasının dik koordinatları denir.

1.1. Örnek

$A = (-2, 2, -3)$, $B = (1, -2, 4)$, $C = (-2, 3, 1)$, $D = (2, 4, 5)$ noktalarını dik koordinat sisteminde işaretleyiniz.

Çözüm

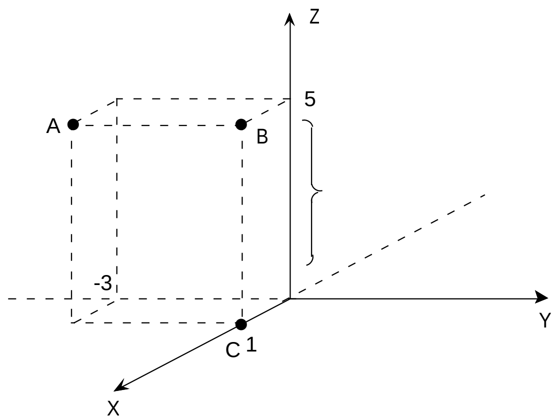


Şekil 2.2.

1.2. Örnek

Şekil 2.3 de verilen dikdörtgenler prizmasında koordinat eksenleri üzerinde verilen sayılardan yararlanarak A, B, C noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm



Şekil 2.3.

Şekil 2.3 den görüldüğü gibi

$$A = (1 , -3 , 5) \ , B = (1 , 0 , 5) \ , C = (1 , 0 , 0)$$

dir.

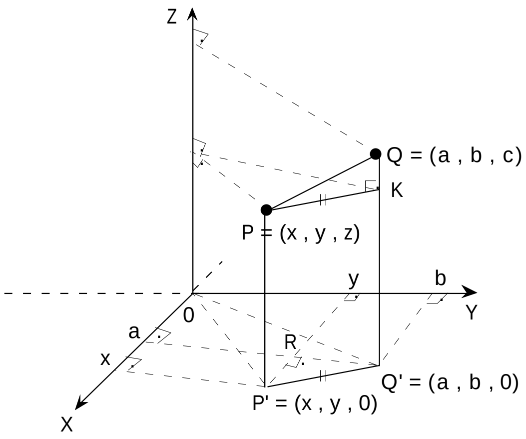
Dikkat edilecek olursa; XY- düzlemi üzerindeki noktaların üçüncü bileşenleri sıfırdır. Benzer olarak, XZ- düzlemindeki noktaların ikinci bileşenleri, YZ- düzlemindeki ise noktaların birinci bileşenleri sıfırdır.

Düzlemde olduğu gibi, uzayda noktalar arasındaki ilişkiler (geometrik problemler) bu noktaların koordinatları yardımıyla çözülebildiğini örnek problemlerle görelim.

1.3. Örnek

Uzayda dik koordinatlarla verilen $P = (x , y , z)$ ve $Q = (a , b , c)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm



Şekil 2.4.

Şekil 2.4 de P'Q'R dik üçgeninde, Pisagor teoremine göre:

$$\begin{aligned} |P'Q'|^2 &= |P'R|^2 + |Q'R|^2 \\ &= |x - a|^2 + |b - y|^2 \\ &= |x - a|^2 + |y - b|^2 \end{aligned}$$

dir. Dikkat edilirse, $|PK| = |P'Q'|$ dir.

PQK dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |PK|^2 + |QK|^2 \\ &= |P'Q'|^2 + |QK|^2 \\ &= |x - a|^2 + |y - b|^2 + |z - c|^2 \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın karekökü alınırsa

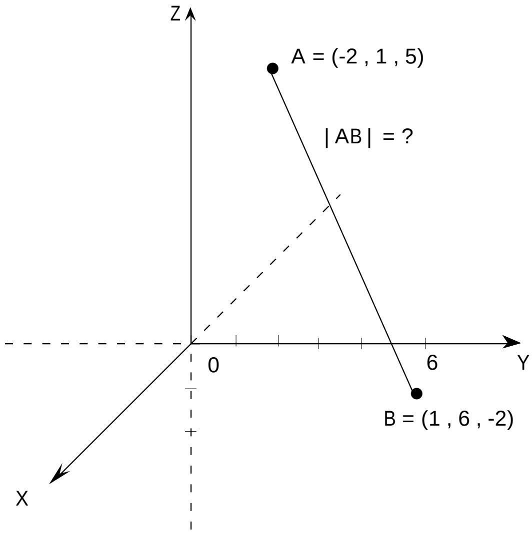
$$|PQ| = \sqrt{|x - a|^2 + |y - b|^2 + |z - c|^2}$$

elde edilir.

1.4. Örnek

Uzayda dik koordinatları A = (-2 , 1 , 5) , B = (1 , 6 , -2) olarak verilen noktaların arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm



Şekil 2.5.

Bir önceki örnekte elde ettiğimiz uzayda iki nokta arasındaki uzaklık

$$|AB| = \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2 + |z-c|^2}$$

formülünde, verilen noktaların koordinatları yerine konulursa,

$$|AB| = \sqrt{|-2-1|^2 + |1-6|^2 + |5-(-2)|^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2 + (7)^2}$$

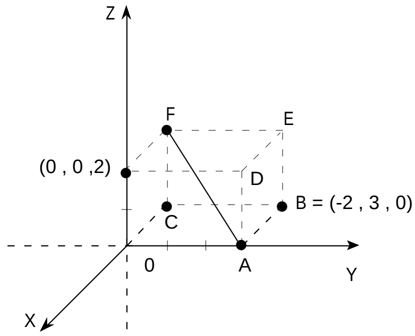
$$= \sqrt{9 + 25 + 49}$$

$$= \sqrt{83} \text{ birim}$$

buluruz.

1.5. Örnek

Aşağıdakişekilde verilen dik prizmanın $|FA|$ köşegen uzunluğunu bulunuz.



Şekil 2.6.

Çözüm

Önce F ve A noktalarının koordinatlarını belirleyelim. Şekil 2.6 dan

$$F = (-2 , 0 , 2) \quad \text{ve} \quad A = (0 , 3 , 0)$$

olduğu kolayca görülür. Buradan,

$$|FA| = \sqrt{|-2-0|^2 + |0-3|^2 + |2-0|^2}$$

$$= \sqrt{17} \text{ birim}$$

olur.

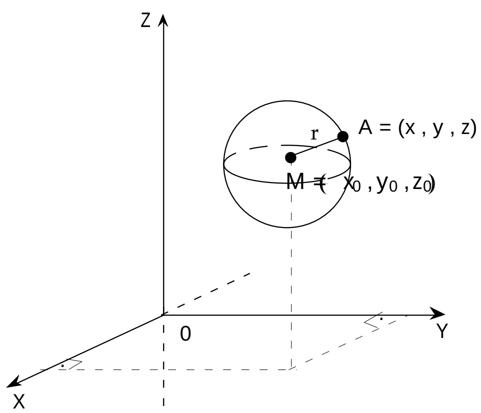
1.6. Tanım

Uzayda, sabit bir noktadan sabit bir uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bir küredir.

1.7. Örnek

Merkezi $M = (x_0 , y_0 , z_0)$, yarıçapı r olarak verilen kürenin denklemini bulunuz.

Çözüm



Şekil 2.7.

Küre üzerinde herhangi bir A = (x , y , z) noktasını alalım (Şekil 2.7). Buna göre

$$|MA| = \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2} = r$$

$$|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 = r^2$$

bulunur.

1.8. Örnek

Uzayda M = (-1 , 1 , 2) noktasından 2 birim uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulunuz.

Çözüm

Bu geometrik yere ait A = (x , y , z) noktasını alalım.

$|MA| = 2$ den

$$\sqrt{|x + 1|^2 + |y - 1|^2 + |z - 2|^2} = 2$$

$$|x + 1|^2 + |y - 1|^2 + |z - 2|^2 = 4$$

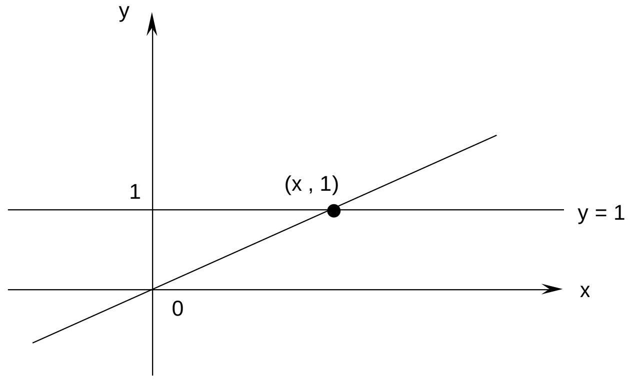
$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z + 2 = 0$$

küresi elde edilir.

2. Homogen Koordinatlar

Başlangıç olarak, doğruyu düzlemdeki koordinat sisteminden faydalanarak başka bir şekilde koordinatlayalım. Bir sayı doğrusunu düzlemde X- ekseni ya da Y- ekseni olarak yerleştirmiştik. Bu seçimler oldukça özeldir. Koordinatlama işini başka seçimle yapalım. Örneğin düzlemde y = 1 doğrusunu ele alalım.



Şekil 2.8.

Bu $y = 1$ doğrusu üzerinde her noktanın koordinatı $(x , 1)$ formundadır. Görüldüğü gibi bizim ikinci koordinatımız hep 1 olmaktadır. Orijinden geçen herhangi bir doğru alındığında eğer bu doğru, $y = 1$ doğrusunu $(x ,1)$ noktasında kesiyorsa bu doğrunun eğimi $\frac{1}{x}$ dir. Yani, bu doğru üzerindeki noktalar ile eğimleri sıfırdan farklı orijinden geçen doğrular arasında iki yönlü bir ilişki vardır. Yani, $y = 1$ doğrusu ile eğimleri sıfırdan farklı, orijinden geçen doğruları karakterize etmiş oluruz. Başka bir deyişle, $y = 1$ doğrusunu, eğimleri sıfırdan farklı ve orijinden geçen doğrular ile koordinatlamış olduk.

Fakat bu yapılan koordinatlama işlerinin çok önemli yetersizliği vardır. Düzlemin farklı noktalarına karşılık getirilen doğrular kesişirler. Daha da ötesi kuruluş gereği bütün doğrular (0,0) başlangıç noktasından geçerler. İyi bir koordinatlama için bu doğruların ikişer ikişer arakesitleri boş olmalıydı. Bunun üzerinden gelmenin birçok yolu vardır. Bunlardan en kolayı düzlemden başlangıç noktasını çıkarmaktır. Yani düzlem yerine başlangıç noktasından delinmiş düzlemle bu işlemleri yaparsak koordinatlama tamamen amacına ulaşır.

Öte yandan orijinden geçen bir doğru eğimi ile tamamen karakterize edilir. Biz, orijinden geçen eğimi sıfırdan farklı doğrulara nokta gözüyle bakacağımız için, bu doğru üzerindeki bütün noktaları bir şekilde birbirleriyle denk tutmamız gerekir. Dikkat edilirse (x_1 , y_1) , (x_2, y_2) aynı doğru üzerinde iki nokta ise $x_1 = my_1$ ve $x_2 = my_2$ dir. Benzer şekilde, başlangıç noktasından farklı (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) noktaları aynı doğru üzerinde değilseler, $x_1 = \alpha y_1$ ve $x_2 = \alpha y_2$ olacak şekilde bir α gerçel sayısı bulunamaz. Buna göre, düzlemde, orijinden farklı keyfi iki noktayı eğer bir diğerinin gerçel bir katı ise, bu iki noktayı denk tutmak anlamlıdır. Yani, $(\mathbf{R}^2)^* = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ gösterimini kullanarak

$$\beta \subset (\mathbf{R}^2)^* \times (\mathbf{R}^2)^* \qquad ((x_1 , y_1) , (x_2 , y_2)) \in \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists \quad \lambda \in \mathbf{R}^*$$

öyle ki $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$ şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Hatta bu denklik bağıntısı, bizim yukarıdaki inşamızı vermekle kalmayıp, orijinden geçen ve eğimi sıfır olan bir doğru ya da (1 , 0) elemanının denklik sınıfı ile eşler. Eğer bir (x , y) denklik sınıfını [X : Y] ile gösterirsek, bu yeni denklik sınıfları kümesi y = 1 doğrusunu ve [1 : 0] noktasıyla da bilinen dik koordinatların yetersiz kaldığı ∞ noktasını koordinatlayabiliriz.

Benzer şekilde, düzlem de homogen koordinatlar ile, benzer şekilde koordinatlanabilir. Bunun için uzayda z = 1 düzlemini gözönüne almamız gerekir. Yukarıdaki aynı geometrik inşa sürdürülürse bu defa uzayda

$$(x_1 , x_2 , x_3) \cong (y_1 , y_2 , y_3) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \quad \lambda \in \mathbf{R}^*$$

vardır ki $x_1 = \lambda y_1$, $x_2 = \lambda y_2$, $x_3 = \lambda y_3$ denklik bağıntısına götürür. Benzer şekilde (x , y , z) sıralı üçlüsünün denklik sınıfını [X : Y : Z] ile gösterirsek, z = 1 düzlemini ve bunun sonsuzdaki noktalarını da koordinatlamış oluruz. Eğer amaç yalnızca düzlemi koordinatlamaksa sonsuzlukları tamamen gözardı edebiliriz. Bilinen dik koordinatlarla homojen koordinatlar arasındaki ilişki

$$(x,y) \rightarrow [X : Y : 1]$$

ve

$$[X : Y : Z] \rightarrow \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$$

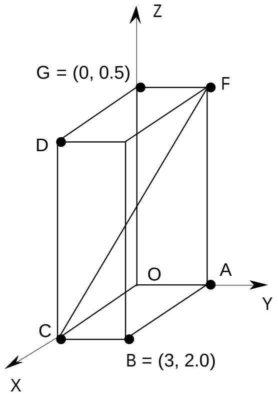
şeklindedir.

Örneğin y = x+1 ifadesi homojen koordinatlardan $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

Y = X + Z şeklini alır.

Değerlendirme Soruları

1. Yandaki şekle göre | FC | kaç birimdir?
   A. 4
   B. 5
   C. $\sqrt{29}$
   D. 6
   E. $\sqrt{38}$



2. A = (1, x, 3) ve B = (1, 0, 0) noktaları arasındaki uzaklık 5 birimdir. Buna göre x değeri nedir?
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 4
   E. 6

3. Uzayda M = (1, 0, 3) noktasından 4 birim uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?
   A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z - 6 = 0$
   B. $x^2 + z^2 - 2x - 6z - 6 = 0$
   C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6z + 6 = 0$
   D. $x^2 + z^2 - 2x - 6z + 6 = 0$
   E. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3z - 6 = 0$

4. Aşağıdakilerden hangisi homogen koordinatlarda bir doğru gösterir?
   A. $X = Y - 1$
   B. $X = XY + YZ$
   C. $3X = 4Y - Z$
   D. $X^2 = Y$
   E. $XZ = YZ + Z^2$

5. Homogen koordinatlarda [2 : 1 : -1] noktası aşağıdaki noktalardan hangisi ile aynı noktadır?
   A. [-4 : 2 : -2]
   B. [3 : 1 : -1]
   C. [-3 : -1 : 1]
   D. [-4 : -2 : -2]
   E. [-4 : -2 : 2]

6. $\mathbf{R}^3$ de aşağıda verilen noktalardan hangisi $\{ (x , y , z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = z^2 \}$ kümesine aittir?
   A. (0 , -1 , 1)
   B. (0 , 0 , 0)
   C. (1 , 0 , 1)
   D. (-1 , 0 , -1)
   E. (0 , 0 , 1)

7. $\mathbf{R}^3$ de aşağıda verilen noktalardan hangisi $\{ (x , y , z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 1 \} \cap \{ (x , y , z) \in \mathbf{R}^3 \mid y - z = 0 \}$ kümesine aittir?
   A. (1 , -1 , 0)
   B. (0 , 1 , 1)
   C. (1 , 0 , 0)
   D. (2 , 0 , 0)
   E. (1 , 1 , 1)

8. Aşağıda verilen kümelerden hangilerinin tek elemanı vardır?
   i) $\{ (x , y , z) \in \mathbf{R^3} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0 \}$
   ii) $\{ (x , y , z) \in \mathbf{R^3} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$
   iii) $\{ (x , y , z) \in \mathbf{R^3} \mid x^2 + y^2 + z^2 = -1 \}$
   A. i , ii
   B. ii
   C. iii
   D. i
   E. ii , iii

9. Düzlemde dik koordinatlarda $x = y^2 + 1$ denklemi ile tanımlanan eğrinin homogen koordinatlardaki denklemi nedir?
   A. $XZ = Y^2$
   B. $XZ = Y^2 + Z^2$
   C. $XZ^2 = Y^2 + Z$
   D. $XZ = Y^2 - Z^2$
   E. $Z = Y^2 + X$

10. $P = (1 , -2 , 3)$ $Q = (4 , 3 , -1)$ noktaları arasındaki uzaklık nedir?
   A. $5\sqrt{2}$
   B. $3\sqrt{2}$
   C. $5\sqrt{3}$
   D. $3\sqrt{3}$
   E. 7

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. E 2. D 3. A 4. C 5. E 6. B 7. C 8. D 9. B 10. A