Vektörler İle Tanımlanan İşlemler

Yazar
Yrd.Doç.Dr. Nevin MAHİR

ÜNİTE

4

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- iki vektörün skaler çarpımı ve skaler çarpımın özelliklerini öğrenecek ve geometrik yorumlar yapabilecek,
- vektörel çarpım ile karma çarpım ve bunların özelliklerini kavrayacak, geometrik yorumlar yapabileceksiniz.

İçindekiler

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi kavrayabilmek için determinant fonksiyonu ve özelliklerini hatırlayınız.

1. İki Vektörün Skaler Çarpımı

Uzayda, $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ gibi iki vektörün skaler çarpımı

$$\vec{a}.\vec{b}=a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre, iki vektörün skaler çarpımında bir gerçel sayı elde edilir.

1.1. Örnek

$\vec{a}=(-2, -1, 0)$, $\vec{b}=(1, 7, 5)$ vektörlerinin skaler çarpımını bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\vec{a}.\vec{b} &= (-2, -1, 0).(1, 7, 5)\\ &= -2.1+(-1).7+0.5\\ &= -2-7+0\\ &= -9\end{aligned}$$

2. Skaler Çarpımının Özellikleri

1. $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (Değişme Özelliği)

2. $\vec{a}.\vec{a}\geq 0$ (Pozitif tanımlılık)
   $\vec{a}.\vec{a}=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

3. $k(\vec{a}.\vec{b})=(k\vec{a}).\vec{b}=\vec{a}.(k\vec{b})$ $k\in \mathbf{R}$

4. $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (Dağılma Özelliği)

Bu özellikleri skaler çarpımın tanımını kullanarak kolayca gösterebiliriz.

1. $\vec{a}.\vec{b}=a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ reel sayılarda çarpma işleminin değişme özelliği
   $=b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$ kullanılarak,
   $=\vec{b}.\vec{a}$

bulunur.

2. $\vec{a} . \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) . (a_1, a_2, a_3)$

$= a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3$

$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

a_1, a_2, a_3 gerçel sayılar olduklarından

$a_1^2 \geq 0$ $a_2^2 \geq 0$ ve $a_3^2 \geq 0$ dır. Dolayısıyla

$\vec{a} . \vec{a} \geq 0$ bulunur

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0, \ a_2 = 0, \ a_3 = 0$ olduğundan

$\vec{a} . \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = (0, 0, 0) = \vec{0}$ dür

3. $k(\vec{a} . \vec{b}) = k[(a_1, a_2, a_3) . (b_1, b_2, b_3)]$

$= k(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$

$= k(a_1 b_1) + k(a_2 b_2) + k(a_3 b_3)$

Reel sayılarda çarpma işleminin birleşme özelliği kullanılarak,

$= (k a_1) b_1 + (k a_2) b_2 + (k a_3) b_3$

$= (k a_1, k a_2, k a_3) . (b_1, b_2, b_3)$

$= k(a_1, a_2, a_3) . (b_1, b_2, b_3)$

$= (k \vec{a}) . \vec{b}$

4. $\vec{a} . (\vec{b} + \vec{c}) = (a_1, a_2, a_3) . [(b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3)]$

$= (a_1, a_2, a_3) . (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)$

$= a_1 (b_1 + c_1) + a_2 (b_2 + c_2) + a_3 (b_3 + c_3)$

$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3$

$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)$

$= \vec{a} . \vec{b} + \vec{a} . \vec{c}$

3. Skaler Çarpımla İlgili Sonuçlar

1. Bir $\vec{a}$ vektörünün normu;

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,.\,\vec{a}} = \sqrt{(a_1\,,a_2\,,a_3)\,.(a_1\,,a_2\,,a_3)}$$

$$= \sqrt{a_1\,a_1 + a_2\,a_2 + a_3\,a_3}$$

$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

şeklinde, skaler çarpımla da tanımlanır.

2. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektör arasındaki küçük açı θ ise

$$\vec{a}.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

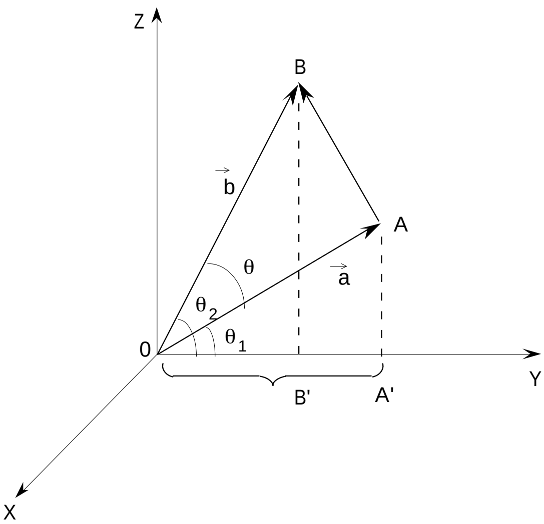
ve

$0 \le \theta < \pi$ olduğundan

$$\vec{a}.\,\vec{b} \le |\vec{a}\,.\,\vec{b}| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

dır.

Şekil 4.1. den



Şekil 4.1:

$$\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{|OA'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |OA'| = |\vec{a}| \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 &= \frac{|AA'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |AA'| = |\vec{a}| \sin\theta_1 \end{aligned}\right\} A = \left(|\vec{a}| \cos\theta_1, |\vec{a}| \sin\theta_1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_2 &= \frac{|OB'|}{|\vec{b}|} \Rightarrow |OB'| = |\vec{b}| \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 &= \frac{|BB'|}{|\vec{b}|} \Rightarrow |BB'| = |\vec{b}| \sin\theta_2 \end{aligned}\right\} B = \left(|\vec{b}| \cos\theta_2, |\vec{b}| \sin\theta_2\right)$$

yazabiliriz.

$$\left|\overrightarrow{AB}^{\,2}\right| = \left(|\vec{b}| \cos\theta_2 - |\vec{a}| \cos\theta_1\right)^2 + \left(|\vec{b}| \sin\theta_2 - |\vec{a}| \sin\theta_2\right)^2$$

Gerekli işlemler yapılarak

$$\left|\overrightarrow{AB}^{\,2}\right| = |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\theta_2 - \theta_1) + |\vec{a}|^2 \text{ .... (1)}$$

bulunur.

$\theta_2 - \theta_1 = \theta$ olsun.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \vec{b} - \vec{a}$ dan

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (\vec{b} - \vec{a}) . (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \vec{b} . \vec{b} - \vec{a} . \vec{b} - \vec{b} . \vec{a} + \vec{a} . \vec{a} \\ &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} . \vec{b} + |\vec{a}|^2 \text{ .... (2)} \end{aligned}$$

(1) ve (2) den

$$|\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta + |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} . \vec{b} + |\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow \vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$

elde edilir. Bu formülden iki vektör arasındaki açının kosinüsü,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

dır.

Diğer taraftan -1 ≤ cosθ ≤ 1 olduğundan

$$\left|\vec{a}\,.\,\vec{b}\right| = \left|\,|\vec{a}|\;|\vec{b}|\cos\theta\right|$$

$$\left|\vec{a}\,.\,\vec{b}\right| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

eşitliği geçerlidir. Ayrıca

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta \quad \text{ifadesinden}$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

dır. Buna göre,

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} \le \left|\vec{a}\,.\,\vec{b}\right| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|$$

dır.

3.1. Örnek

$$\vec{a} = (2, 1, 3) \quad \text{ve} \quad \vec{b} = (0, 4, -1)$$

vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}\vec{a}\,.\,\vec{b} &= (2, 1, 3)\,.\,(0, 4, -1)\\ &= 2.0 + 1.4 + 3.\,(-1\\ &= 1\end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,.\,\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b}\,.\,\vec{b}} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

Bu değerler

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta \quad \text{ifadesinde yerine yazılırsa}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{31}}$$

olur.

Dik Vektörler

İki vektör arasındaki açı $\pi/2$ ise bu vektörler birbirine diktir denir ve $\vec{a} \perp \vec{b}$ şeklinde gösterilir. Sıfırdan farklı $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri için

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{ise} \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

dir. Gerçekten,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta = 0 \qquad |\vec{a}| \neq 0 \quad \text{ve} \quad |\vec{b}| \neq 0 \quad \text{olduğundan}$$

$\cos\theta = 0$ dır. Dolayısıyla $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ dir.

Tersine, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ise

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\frac{\pi}{2} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

dır. O halde,

$\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$ olmak üzere

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

dır.

Özel olarak, $\vec{0}$ vektörü her vektöre diktir.

3.2. Örnek

$$\vec{a} = (1, 2, 4), \ \vec{b} = (2, -5, 3), \ \vec{c} = (2, -1, 0)$$

vektörlerinin birbirlerine dik olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (1, 2, 4) \cdot (2, -5, 3) \\ &= 1 \cdot 2 + 2(-5) + 4 \cdot 3 \\ &= 2 - 10 + 12 \\ &= 4 \neq 0 \end{aligned}$$

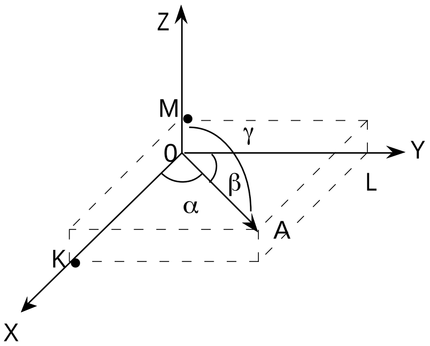
olduğundan, $\vec{a}$ vektörü $\vec{b}$ vektörüne dik değildir.

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = (1, 2, 4)\cdot(2, -1, 0)$$
$$= 2 - 2$$
$$= 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = (2, -5, 3)\cdot(2, -1, 0)$$
$$= 4 + 10$$
$= 14 \neq 0$ olduğundan $\vec{b}$ vektörü $\vec{c}$ ye dik değildir.

Vektörlerin Doğrultu Açıları ve Doğrultman Kosinüsleri

Herhangi bir $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektörünü alalım.



Şekil 4.2:

$\vec{a}$ vektörünün uzunluğu $r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ve koordinat eksenleriyle pozitif yönde yaptığı açılar sırasıyla α, β, γ olsun. Bu açılara $\vec{a}$ vektörünün doğrultu açıları denir. Şekil 4.2 ye göre

α açısı KOA açısı
β açısı LOA açısı
γ açısı MOA açısı

dır. $\vec{a}$ nın doğrultman kosinüsleri adı verilen doğrultu açılarının kosinüsleri, $\vec{a}$ ile $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ vektörlerinin skaler çarpımından bulunabilir.

$$\vec{a}\cdot\vec{e_1} = |\vec{a}|\,|\vec{e_1}|\cos\alpha$$

$$(a_1, a_2, a_3)\cdot(1, 0, 0) = |\vec{a}|\cos\alpha$$

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{r}$$

Benzer olarak,

$$\vec{a}\,.\,\vec{e_2} = |\vec{a}|\,|\vec{e_2}|\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{a_2}{r}$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{e_3} = |\vec{a}|\,|\vec{e_3}|\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{a_3}{r}$$

elde edilir. $\vec{a}$ vektörünün doğrultu kosinüslerinin karelerinin toplamı ise,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2}{r^2} + \frac{a_2^2}{r^2} + \frac{a_3^2}{r^2}$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{r^2}$$

$$= \frac{r^2}{r^2} = 1$$

dir.

3.3. Örnek

$\vec{a} = (4\,,5\,,-3)$ vektörünün doğrultman kosinüslerini bulunu

Çözüm

$\vec{a}$ vektörünün uzunluğu $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-3)^2} = 5\sqrt{2}$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{r} = \frac{4}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{r} = \frac{-3}{5\sqrt{2}}$$

4. İki Vektörün Vektörel Çarpımı

Uzayda $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ gibi iki vektörün vektörel çarpımı;

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\; a_3 b_1 - a_1 b_3,\; a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre, iki vektörün vektörel çarpımının sonucunda başka bir vektör elde edilir. İki vektörün vektörel çarpımı determinant yardımıyla da,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde verilebilir. Bu tanıma göre, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin vektörel çarpımını bulmanın kolay yolu; önce, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin bileşenleri ile

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris oluşturulur. Sonra, bu matrisin sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü sütunları atılarak,

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

determinantları bulunur. Bu determinantlar $\vec{a} \times \vec{b}$ bileşenlerini oluşturur.

4.1. Örnek

$\vec{u} = (2, -1, 4)$ ve $\vec{v} = (1, 3, 0)$ ise

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-12, 4, 7)$$

dir.

Herhangi bir $\vec{a}$ vektörünün, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ vektörleri ile,

$$\vec{a} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3}$$

şeklinde yazılabildiğini görmüştük. Buna göre, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin vektörel çarpımı olan

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

vektörü de

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e_1} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e_3}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu ifade de (biçimsel olarak)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

determinantına eşittir. Böylece $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörü bu determinant yardımıyla da bulunabilir.

4.2. Örnek

$\vec{a} = (2, -1, 4)$ ve $\vec{b} = (1, 3, 0)$ vektörlerinin vektörel çarpımını bulunuz.

Çözüm

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1(-1.0 - 4.3) - \vec{e}_2(2.0 - 4.1) + \vec{e}_3(2.3 - (-1).1)$$

$$= -12\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$$

$$= (-1, 4, 7)$$

5. Vektörel Çarpımın Özellikleri

1. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$
4. $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) \quad k \in \mathbf{R}$
5. $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörü hem $\vec{a}$, hem de $\vec{b}$ ye diktir.
6. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \,.\, \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \,.\, \vec{c})\vec{a}$
7. $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \,.\, \vec{b})^2$
8. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta$, burada θ, $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki küçük açıdır.

İlk dört özelliği determinant özelliklerini kullanarak kolayca ispatlayabiliriz. Yedinci ve sekizinci özelliklerin ispatını karma çarpımdan sonra vereceğiz.

1. $$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 (a_2 a_3 - a_2 a_3) - \vec{e}_2 (a_1 a_3 - a_1 a_3) + \vec{e}_3 (a_1 a_2 - a_1 a_2)$$

$$= 0.\vec{e}_1 + 0.\vec{e}_2 + 0.\vec{e}_3 = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

2. $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

3. $$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

4. $$(k\vec{a}) \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ k a_1 & k a_2 & k a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = k(\vec{a} \times \vec{b})$$

5. $$\vec{a} . (\vec{a} \times \vec{b}) = (a_1, a_2, a_3) . (a_2 b_3 - a_3 b_2 , a_3 b_1 - a_1 b_3 , a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= a_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + \cancel{a_2 a_3 b_1} - a_2 a_1 b_3 + a_3 a_1 b_2 - \cancel{a_3 a_2 b_1} = 0$$

Görüldüğü gibi, $\vec{a}$ ile $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörünün skaler çarpımı sıfır olduğundan, $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörü $\vec{a}$ vektörüne diktir. Benzer olarak, $\vec{b} . (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ olduğu ve böylece $\vec{a} \times \vec{b}$ nin $\vec{b}$ vektörüne dik olduğu gösterilmiş olur.

6. $$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = [(a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3] \times \vec{c}$$

$$[(a_3 b_1 - a_1 b_3) c_3 - (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_2] \vec{e}_1$$

$$[(a_1 b_2 - a_2 b_1) c_1 - (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_3] \vec{e}_2$$

$$[(a_2 b_3 - a_3 b_2) c_2 - (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_1] \vec{e}_3$$

$$\left[(a_3 c_3 + a_2 c_2)\, b_1 - (b_3 c_3 + b_2 c_2)\, a_1\right] \vec{e}_1$$

$$\left[(a_1 c_1 + a_3 c_3)\, b_2 - (b_1 c_1 + b_3 c_3)\, a_2\right] \vec{e}_2$$

$$\left[(a_2 c_2 + a_1 c_1)\, c_3 - (b_2 c_2 + b_1 c_1)\, a_3\right] \vec{e}_3$$

Köşeli parantezlerin içlerine, sırasıyla $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$ terimlerini ekleyip çıkarırsak, gerekli işlemlerden sonra,

$$= \left[(\vec{a} \cdot \vec{c})\, b_1 - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, a_1\right] \vec{e}_1 + \left[(\vec{a} \cdot \vec{c})\, b_2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, a_2\right] \vec{e}_2 + \left[(\vec{a} \cdot \vec{c})\, b_3 - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, a_3\right] \vec{e}_3$$

elde ederiz. Böylece

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a}$$

olur.

6. Karma Çarpım

Uzayda herhangi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörleri verilsin. $\vec{a}$ vektörü ile $\vec{b} \times \vec{c}$ vektörünün skaler çarpımı olan, $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ gerçel sayıya $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin karma çarpımı denir. Bu üç vektörün karma çarpımı $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ ile gösterilir ve

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde, determinant yardımıyla hesaplanır.

6.1. Örnek

$$\vec{a} = (0, 4, 5) \quad \vec{b} = (-1, 2, 3) \quad \vec{c} = (2, 0, -2)$$

vektörlerinin karma çarpımını bulunuz.

Çözüm

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -4\left((-1)(-2) - 6\right) + 5(-4)$$

$$= 16 - 20 = -4$$

7. Karma Çarpımın Özellikleri

1. $\left(\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\right)=\left(\vec{b}\,,\vec{c}\,,\vec{a}\right)=\left(\vec{c}\,,\vec{a}\,,\vec{b}\right)$

Determinant özellikleri kullanılarak kolayca gösterilebilir.

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(-)(-)=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)$$

Benzer olarak, $\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)$ gösterilebilir. İkinci determinanta bakacak olursak,

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)$$

dir.

2. $\left(\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+k\vec{b}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}+l\vec{c}\,,\vec{c}\right)$ k, l $\in \mathbf{R}$

3. $\left(k\vec{a}\,,l\vec{b}\,,m\vec{c}\right)=(klm)\left(\vec{a},\vec{b}\,,\vec{c}\right)$; k, l, m $\in \mathbf{R}$

4. $\left(\vec{a},\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\,,\vec{a}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\,,\vec{c}\right)=0$

5. $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\,,\vec{d}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\,,\vec{d}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\,,\vec{d}\right)$

vektörel çarpımın özelliklerinde, ispatını sonraya bıraktığımız son iki özelliği göstermek için Lagrange özdeşliğini verelim.

Lagrange Özdeşliği

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\,.\,\vec{c}\right)\left(\vec{b}\,.\,\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\,.\,\vec{d}\right)\left(\vec{b}\,.\,\vec{c}\right)$$

İspat

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{k}$ olsun.

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\vec{k}\,.\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)$, karma çarpımının 7.1. özelliğinden

$\left(\vec{k}\times\vec{c}\right).\,\vec{d}$ dir. Burada k yerine $\vec{a}\times\vec{b}$ yi alarak

$\left[\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\right].\,\vec{d}$ yazabiliriz. Vektörel çarpımın 6. özelliğinden

$\left[\left(\vec{a}\,.\,\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}\,.\,\vec{c}\right)\vec{a}\right].\,\vec{d}$ olur. Skaler çarpımın özelliğini kullanarak,

$\left(\vec{a}\,.\,\vec{c}\right)\left(\vec{b}\,.\,\vec{d}\right)-\left(\vec{b}\,.\,\vec{c}\right)\left(\vec{a}\,.\,\vec{d}\right)$

Lagrange özdeşliğini ispatlamış oluruz.

Bu özdeşlikte, $\vec{c} = \vec{a}$ ve $\vec{d} = \vec{b}$ alınırsa,

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \,.\, \vec{a}\right)\left(\vec{b} \,.\, \vec{b}\right) - \left(\vec{a} \,.\, \vec{b}\right)\left(\vec{b} \,.\, \vec{a}\right)$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a} \,.\, \vec{b}\right)^2$$

Vektörel çarpımın yedinci özelliği elde edilir.

Ayrıca yedinci özellikte

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - \left(\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\theta\right)^2$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \cos^2\theta$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right)$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \sin^2\theta$$

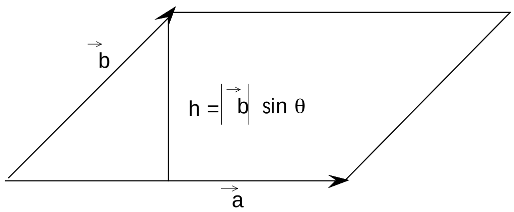
Her iki tarafın karakökü alınarak

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta \qquad , \; 0 \le \theta \le \pi$$

Vektörel çarpımın sekizinci özelliği ispatlanmış olur. Bunun geometrik anlamı $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ nin $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanına eşit olmasıdır.

Yani,

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta = \left|\vec{a}\right| . \, h$$



Şekil 4.3:

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ sıfırdan farklı iki vektör olsun.

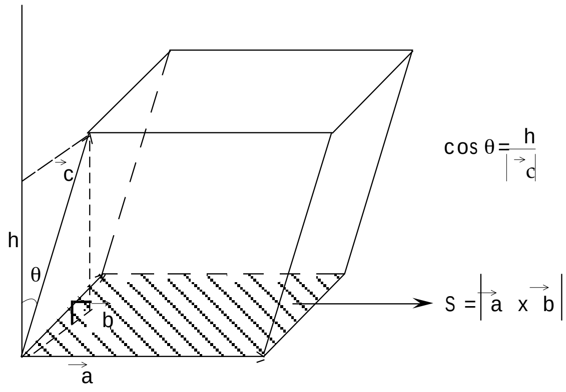
Eğer $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 0$ ise $\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\theta = 0$

$$\Rightarrow \sin\theta = 0 \;\; \text{dan}$$

$$\theta = 0 \;\; \text{veya} \; \theta = \pi \;\; \text{olur.}$$

Bu da $\vec{a} \,/\!/\, \vec{b}$ olduğunu gösterir.

6. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c}$ karma çarpımı, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörlerinin üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmine eşittir.



Şekil 4.4:

Şekil 4.4 de $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{h}$ vektörü $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin belirttiği düzleme diktir ve $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ ise, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin üzerine kurulan paralel kenarın alanına eşittir.

Buna göre,

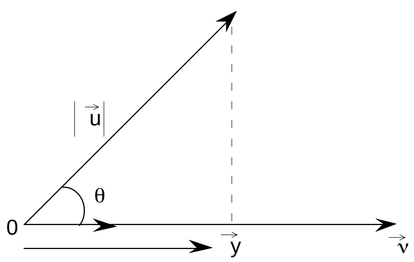
$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \vec{c} = \underbrace{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}\ \underbrace{\left|\vec{c}\right| \cos\theta}$$

$$= \quad S.\,h$$

8. Çözümlü Problemler

1. $\vec{u} = (1, 5, -3)$ vektörünün $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm



Şekil 4.5:

Şekil 4.5 göre $\vec{u}$ nun $\vec{v}$ üzerindeki dik izdüşümü $\vec{y}$ ve $\vec{v}$ yönündeki birim vektör $\vec{v}_0$ olsun.

$$\cos\theta = \frac{|\vec{y}|}{|\vec{u}|} \Rightarrow |\vec{y}| = |\vec{u}| \cos\theta$$

$$|\vec{u}| = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

$$\frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|}\,.\,\vec{v} \quad \text{ve} \quad \vec{y} = \vec{v}_0\,.\,|\vec{y}|$$

$$= |\vec{y}|\,.\,\frac{1}{|\vec{v}|}\,.\,\vec{v}$$

$$= \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{v}|}\,.\,\frac{1}{|\vec{v}|}\,\vec{v}$$

$$\vec{y} = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\,.\,\vec{v}$$

dir.

$$\vec{y} = \frac{(1, 5, -3)\,.\,(-2, 3, 1)}{|(-2, 3, 1)|^2}\,.\,(-2, 3, 1)$$

$$= \frac{-2 + 15 - 3}{14}\,.\,(-2, 3, 1)$$

$$= \frac{10}{14}\,(-2, 3, 1) = \frac{5}{7}\,(-2, 3, 1) = \left(\frac{-10}{7}, \frac{15}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

elde edilir.

2. $\vec{u} = (1, 5, -3)$, $\vec{v} = (2, -1, 0)$ vektörlerine dik olan bir vektör bulunuz.

Çözüm

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerin dik olan vektör, bu iki vektörün vektörel çarpımı olan vektördür. Yani,

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - 11\vec{e}_3 = (-3, -6, -11)$$

3. $\vec{u} = (3, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, -2, 4)$, $\vec{w} = (-5, 4, 1)$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzlünün hacmini bulunuz.

Çözüm

Paralelyüzlüyü oluşturan üç vektörün karma çarpımı, bu paralelyüzlünün hacmine eşittir. O halde,

$$\vec{V} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \left| \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = |-64| = 64 br^3$$

4. $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (-1, 0, 5)$ vektörlerinin vektörel çarpımını ve bu vektörler üzerine kurulan parelelkenarın alanını bulunuz. Bu iki vektör arasındaki θ açısını hesaplayınız.

Çözüm

Paralkenarı oluşturan iki vektörün vektörel çarpımının normu bu paralelkenarın alanına eşittir.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5\vec{e}_1 - 13\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (5, -13, 1)$$

$$S = |\vec{u} \times \vec{v}| = |(5, -13, 1)| = \sqrt{195}\ br^2$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$$

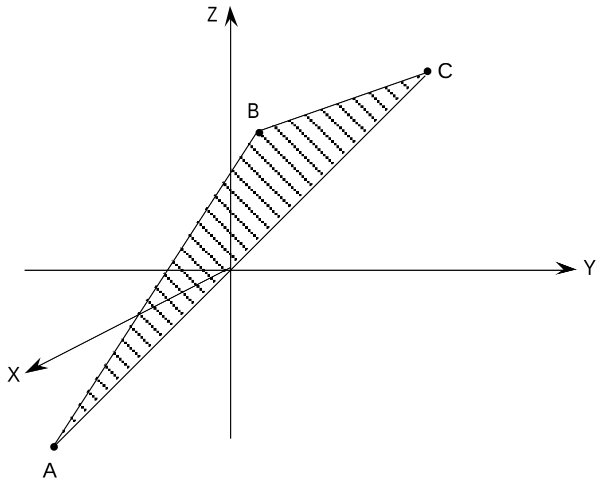
formülünden,

$$\sin\theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{\sqrt{195}}{\sqrt{14}.\sqrt{26}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{14}}$$

$$\theta = \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{14}}$$ elde edilir.

5. Köşeleri $A=(4,0,-1)$, $B=(1,1,2)$ ve $C=(-2,1,2)$ olan bir üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm



Şekil 4.6:

Şekil 4.6 dan $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörlerinin üzerine kurulan üçgenin alanı,

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

dir. Buna göre,

$$\overrightarrow{AB}=(1-4\ ,\ 1-0\ ,\ 2-(-1))=(-3\ ,\ 1\ ,\ 3)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-2-4\ ,\ 1-0\ ,\ 3(-1))=(-6\ ,\ 1\ ,\ 4)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}==\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ -3 & 1 & 3\\ -6 & 1 & 4\end{vmatrix}=\vec{e}_1-6\vec{e}_2+3\vec{e}_3\ =(1,-6\ ,\ 3)$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|(1,-6,3)\right|$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+36+9}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{46}\ br^2$$

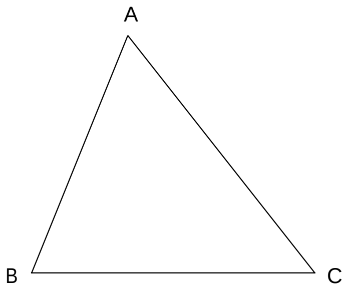
bulunur.

6. Bir ABC üçgeninde

$$\frac{\sin A}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\sin B}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{\sin C}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm



Şekil 4.7:

ABC üçgeninde,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$$

dır. Bunu sırasıyla $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$ ve $\overrightarrow{AB}$ vektörleri ile vektörel çarpalım.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}+\cancel{\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CA}}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}=0\ .....\ (1)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}+\cancel{\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BC}}+\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BC}=0\ .....\ (2)$$

$$\cancel{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AB}}+\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}=0\ .....\ (3)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\overset{(1)}{=}-\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}\overset{(2)}{=}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CA}\right|=\left|-\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|$$

$$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|\sin A=\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|\sin C=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\sin B$$

Buradan üç eşitliği $\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|$ ile bölersek

$$\frac{\sin A}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\sin C}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{\sin B}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

elde ederiz.

Değerlendirme Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1. $\vec{u} = (-3\ ,\ -6\ ,\ -11)$ vektörü aşağıdaki vektörlerden hangisine diktir?
   A. (3 , 6 , 11)
   B. (0 , -2, 1)
   C. (8 , 0 , 2)
   D. (2, -1, 0)
   E. (0 , -4 , 2)

2. $\vec{u} = \left(0\ ,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{v} = \left(\sqrt{2}\ ,\ 0\ ,\ \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ vektörleri arasındaki açı nedir?
   A. π
   B. $\frac{\pi}{6}$
   C. $\frac{\pi}{3}$
   D. $\frac{\pi}{2}$
   E. $\frac{\pi}{4}$

3. $\vec{u} = (0\ ,\ -3\ ,\ 3)$ ve $\vec{v} = (-1\ ,\ -4\ ,\ -1)$ vektörlerinin her ikisine de dik olan vektör aşağıdakilerden hangisidir?
   A. (3 , 0 , 0)
   B. (15 , -3, -3)
   C. (4 , 1 , 0)
   D. (9, 3, 0)
   E. (9 , -3 , 3)

4. $\vec{u} = (x\ ,\ -2\ ,4)$ ve $\vec{v} = (-6\ ,\ x\ ,\ 1)$ vektörleri veriliyor. $\vec{u}$ ile $\vec{v}$ nin skaler çarpımı 28 ise x değeri nedir?
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. -2
   E. -3

5. $\vec{u}=(1\,,4\,,0)$ vektörünün $\vec{v}=(-2\,,1\,,1)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\left(-\frac{2}{3}\,,\frac{1}{3}\,,\frac{1}{3}\right)$

B. $\left(\frac{1}{3}\,,\frac{4}{3}\,,0\right)$

C. $\left(-\frac{2}{6}\,,\frac{1}{6}\,,\frac{1}{6}\right)$

D. $\left(\frac{1}{6}\,,\frac{4}{6}\,,0\right)$

E. $\left(-\frac{1}{6}\,,\frac{5}{6}\,,1\right)$

6. $\vec{u}=(2\,,0\,,3)$ ve $\vec{v}=(1\,,-4\,,4)$ $\vec{w}=(-1\,,-2\,,-3)$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzün hacmi kaç birim küptür?

A. 58
B. 45
C. 35
D. 25
E. 22

7. $\vec{a}=(1\,,-2\,,3)$ ve $\vec{b}=(1\,,0\,,2)$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı kaç birim karedir?

A. 4
B. 5
C. $\sqrt{7}$
D. $\sqrt{21}$
E. $\sqrt{30}$

8. Köşeleri A = (1 , -1, 2) , B = (2 , -1 , 0) ve C = (0 , 0 , 5) olan bir üçgenin alanı kaç birim karedir?

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

E. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

9. $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ ise $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-6\vec{a} + 2\vec{b})$ çarpımının sonucu nedir?
   A. 5
   B. 10
   C. -8
   D. -6
   E. 0

10. $\vec{u} = (3, -4, -4)$, $\vec{v} = (x, -1, 1)$ $\vec{w} = (1, -3, -5)$ vektörlerinin aynı düzleme paralel olmaları için x ne olmalıdır?
   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3
   E. 4

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D 2. C 3. B 4. E 5. A 6. E 7. D 8. A 9. B 10. C