
Düzlemde Hareket

Yazar

Yrd.Doç.Dr.Nevin MAHİR

ÜNİTE

5

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Düzlemde eşmetrel dönüşümleri öğrenecek,
- Öteleme hareketinin denklemlerini ve özelliklerini görecek,
- Dönme hareketinin denklemlerini ve özelliklerini görecek,
- Düzlemde öteleme-dönme ve dönme-öteleme hareketlerini kavrayacaksınız.

İçindekiler

- Düzlemde Eşmetrel Dönüşümler 89
 - Düzlemde Öteleme 90
 - Ötelemelerin Bileşkesi 94
 - Düzlemde Dönme 94
 - Dönmelerin Bileşkesi 98
 - Düzlemde Öteleme-Dönme ve Dönme-Öteleme 98
 - Çözümlü Problemler 101
 - Değerlendirme Soruları 105
-

Çalıřma Önerileri

- Bileřke fonksiyona ait bilgilerinizi gözden geçiriniz.

1. Düzlemde Eşmetrel Dönüşümler

Eşmetrel dönüşümler, herhangi iki noktayı aralarındaki uzaklık aynı kalacak şekilde farklı iki noktaya gönderen dönüşümlerdir.

Düzlemde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbf{R}$ olmak üzere

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \rightarrow (a_1 x + b_1 y + c_1, a_2 x + b_2 y + c_2)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, uzaklığı koruyor ise bu dönüşüme eşmetrel dönüşüm denir. Bu türden dönüşümler \mathbf{R}^2 de uzaklıkları değiştirmeyen birebir dönüşümlerdir.

1.1. Örnek

$$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{2} y, \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y \right)$$

dönüşümünün, bir eşmetrel dönüşüm olduğunu gösterelim.

Çözüm

Düzlemde, $P_1 = (x_1, y_1)$ $P_2 = (x_2, y_2)$ noktalarını alalım. Bu iki noktanın f dönüşümü altındaki resimleri

$$P'_1 = (x'_1, y'_1) \text{ ve } P'_2 = (x'_2, y'_2)$$

olsun.

$$\begin{aligned} |P'_1 P'_2| &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} \\ |P'_1 P'_2| &= \left[\left(\frac{1}{2} x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_2 \right) - \left(\frac{1}{2} x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_1 \right) \right]^2 + \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_2 + \frac{1}{2} y_2 \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_1 + \frac{1}{2} y_1 \right) \right]^2 \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{\left[\frac{1}{2} (x_2 - x_1) - \frac{\sqrt{3}}{2} (y_2 - y_1) \right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (x_2 - x_1) + \frac{1}{2} (y_2 - y_1) \right]^2} \\ &= \left[\frac{1}{4} (x_2 - x_1)^2 - \frac{2\sqrt{3}}{4} (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \frac{3}{4} (y_2 - y_1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} (x_2 - x_1)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{4} (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \frac{1}{4} (y_2 - y_1)^2 \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |P_1 P_2| \end{aligned}$$

uzaklığın aynı kaldığı görülür. O halde verilen dönüşüm bir eşmetrel dönüşümdür.

1.2. Örnek

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 5 \right)$$

dönüşümünün bir eşmetrel dönüşüm olduğunu gösterelim.

Çözüm

Düzlemde $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ noktalarını alalım. Bu iki noktanın g dönüşümü altındaki resimleri

$$P'_1 = (x'_1, y'_1) \text{ ve } P'_2 = (x'_2, y'_2)$$

olsun.

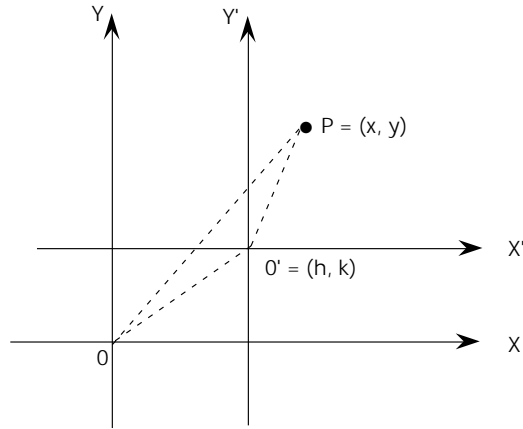
$$\begin{aligned} |P'_1 P'_2| &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} \\ |P'_1 P'_2| &= \left[\left(\frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}y_2 - 3 \right) - \left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1 - 3 \right) \right]^2 + \\ &\quad \left[\left(\frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{5}y_2 + 5 \right) - \left(\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}y_1 + 5 \right) \right]^2 \Bigg]^{1/2} \\ &= \left[\frac{9}{25}(x_2 - x_1)^2 + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \frac{16}{25}(y_2 - y_1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{16}{25}(x_2 - x_1)^2 - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \frac{9}{25}(y_2 - y_1)^2 \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |P_1 P_2| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu g dönüşümünün bir eşmetrel dönüşüm olduğunu gösterir.

Birinci ünite, düzlemde alınan P noktasının farklı şekillerde koordinatlanabildiğini öğrenmiştik. Bu da bize düzlemde eksen sistemlerinin keyfi seçilebildiğini göstermektedir. Bu bölümde farklı iki eksen sistemi verildiğinde, düzlemde alınan P noktasının, bu sistemlerden birisinde koordinatları verilirken, diğerindeki aynı noktanın koordinatlarını veren bağıntıları bulmaya çalışacağız. Kısaca, farklı eksen sistemlerinde, P noktasının koordinatları arasındaki bağıntıları araştıracağız.

2. Düzlemde Öteleme

Birinci eksen sistemi olarak XOY dik koordinat sistemini alalım. Koordinat eksenleri, birinci sistemin koordinat eksenlerine paralel, yani $OX \parallel O'X'$, $OY \parallel O'Y'$ ve başlangıç noktası $O' = (h, k)$ olacak şekilde ikinci bir eksen sistemini seçelim.



Şekil 5.1

Şimdi, XOY sisteminde koordinatları (x, y) olan bir P noktasının X'O'Y' yeni koordinat sistemindeki bu noktanın, (x', y') koordinatları arasındaki bağıntıyı araştıralım. Şekil 5.1 den

$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$$

$$(x, y) = (h, k) + (x', y')$$

$$(x, y) = (x' + h, y' + k)$$

iki vektörün eşitliği tanımından

$$x = x' + h$$

$$y = y' + k$$

öteleme formülleri elde edilir. Bu son eşitlikten

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

bulunur. Böylece öteleme

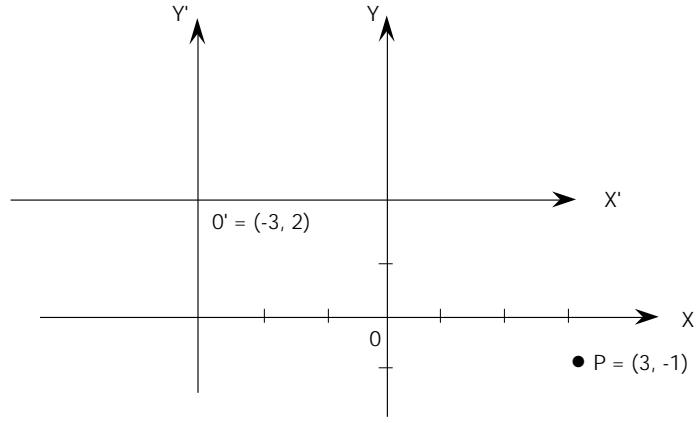
$$T_{(h,k)} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x', y') = (x - h, y - k)$$

şeklinde tanımlanan, düzlemi kendi kendine dönüştüren bir harekettir. Öteleme düzlemin herhangi bir P noktasını, düzlemin başka bir P' noktasına resmeder.

2.1. Örnek

$T_{(-3,2)}$ ötelemesi ile $P = (3, -1)$ noktasının resmini bulunuz.



Şekil 5.2

Çözüm

P noktasının yeni sistemdeki koordinatları

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

formüllerinden yararlanılarak bulunur. Buna göre,

$$x' = 3 - (-3) = 6$$

$$y' = -1 - 2 = -3$$

$$(x', y') = (6, -3)$$

2.2. Örnek

$y^2 - 3x + 2y + 7 = 0$ denkleminin $T_{(2, -1)}$ ötelemesi altında denklemini yazınız.

Çözüm

$$T_{(2, -1)} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x', y') = (x - 2, y + 1)$$

Buradan

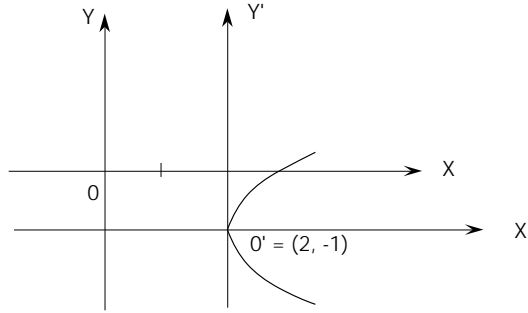
$$x' = x - 2 \Rightarrow x = x' + 2$$

$$y' = y + 1 \Rightarrow y = y' - 1$$

bağıntılarını verilen denklemde yerine koyalım.

$$\begin{aligned}
(y' - 1)^2 - 3(x' + 2) + 2(y' - 1) + 7 &= 0 \\
y'^2 - 2y' + 1 - 3x' - 6 + 2y' - 2 + 7 &= 0 \\
y'^2 - 3x' &= 0 \\
y'^2 &= 3x'
\end{aligned}$$

ikinci sistemdeki denklemini elde ederiz.



Şekil 5.3

2.3. Örnek

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x', y') = (x - h, y - k)$$

öteleme dönüşümünün, bir eşmetrel dönüşüm olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Düzlemde $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ gibi iki nokta alalım. Bu iki nokta arasındaki uzaklık

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

dır. $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ noktaları, $T_{(h,k)}$ ötelemesi ile yeni sistemde

$$A' = (x'_1, y'_1) \quad \text{ve} \quad B' = (x'_2, y'_2) \quad \text{olsun}$$

$$\begin{aligned}
|A'B'| &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = \sqrt{[(x_2 - h) - (x_1 - h)]^2 + [(y_2 - k) - (y_1 - k)]^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= |AB|
\end{aligned}$$

uzaklıklar korunduğundan bir öteleme dönüşümü aynı zamanda bir eşmetrel dönüşümdür.

3. Ötelemelerin Bileşkesi

$T_{(h_1, k_1)}$ ve $T_{(h_2, k_2)}$ gibi herhangi iki ötelemenin $T_{(h_2, k_2)} \cdot T_{(h_1, k_1)}$ bileşkesi yine bir ötelemedir.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_{(h_1, k_1)}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T_{(h_2, k_2)}} & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & & (x', y') & & (x'', y'') \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & T_{(h, k)} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} (T_{(h_2, k_2)} \cdot T_{(h_1, k_1)})(x, y) &= T_{(h_2, k_2)}(T_{(h_1, k_1)}(x, y)) \\ &= T_{(h_2, k_2)}(x - h_1, y - k_1) \\ &= ((x - h_2) - h_1, (y - k_2) - k_1) \\ &= (x - (h_1 + h_2), y - (k_1 + k_2)) \\ h_1 + h_2 = h \text{ ve } k_1 + k_2 = k & \\ &= (x - h, y - k) \end{aligned}$$

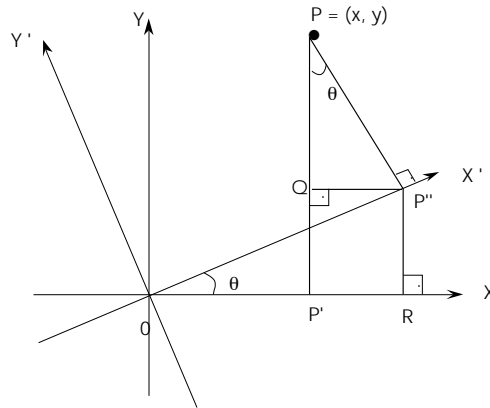
Görüldüğü gibi $T_{(h_2, k_2)} \cdot T_{(h_1, k_1)}$ bileşkesi de bir ötelemedir. Ayrıca,

$$T_{(h_2, k_2)} \cdot T_{(h_1, k_1)} = T_{(h_1, k_1)} \cdot T_{(h_2, k_2)}$$

olduğundan ötelemelerin bileşkesi değişimlidir.

4. Düzlemde Dönme

Başlangıç noktaları aynı olan XOY ve $X'OY'$ eksen sistemlerini alalım. $X'OY'$ sistemi, XOY sisteminin eksenleri başlangıç noktası etrafında, pozitif yönde (saat yönünün tersi) θ açısı kadar döndürerek seçelim. Şimdi XOY ilk sistemde koordinatları (x, y) olan bir P noktasının $X'OY'$ ikinci sistemdeki, bu noktanın (x', y') koordinatları arasındaki bağıntıyı araştıralım.



Şekil 5.4

Şekil 5.4'e göre P noktasının, X -eksenine dik izdüşümü P' , X' -eksenine dik izdüşümü P'' olsun. Şekilden ROP'' açısı ile $P'PP''$ açılarının θ açısına eşit olduğu görülüyor. Buna göre,

$$\begin{aligned}
x &= |OP'| = |OR| - |P'R| = |OR| - |QP''| \\
&= |OP''| \cos \theta - |PP''| \sin \theta = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\
y &= |PP'| = |PQ| + |QP'| = |PQ| + |RP''| \\
&= |OP''| \sin \theta + |PP''| \cos \theta = x' \sin \theta + y' \cos \theta
\end{aligned}$$

Böylece, X ve Y eksenlerinin başlangıç noktası etrafında θ açısı kadar dönme-
siyle elde edilen yeni sistem arasında,

$$\begin{aligned}
x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\
y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta
\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}
x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\
y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta
\end{aligned}$$

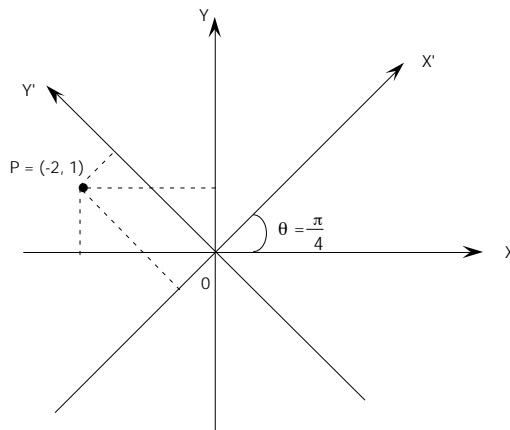
formülleri elde edilir. Birinci formülden P noktasının ikinci sistemde (x', y') koordinatları bilindiğinde, bu noktanın birinci sistemdeki (x, y) koordinatları bulunur. İkinci formülden ise, P noktasının ilk sistemdeki (x, y) koordinatları bilindiğinde, bu noktanın ikinci sistemde ki (x', y') koordinatları bulunur. Böylece dönme,

$$\begin{aligned}
R_\theta : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\
(x, y) &\rightarrow (x', y') = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan, düzlemi kendi kendine dönüştüren bir harekettir. Öteleme dönüşümünde olduğu gibi, bu dönüşümde de, düzlemin bir P noktası başka bir P' noktasına resmedilir.

4.1. Örnek

$R_{\frac{\pi}{4}}$ dönmesi ile $P = (-2, 1)$ noktasının resmini bulun



Şekil 5.5

Çözüm

P noktasının yeni sistemdeki koordinatları,

$$R_{\theta}(x,y) = (x', y') = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$$

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

bağıntıları kullanılarak,

$$x' = -2 \cos \frac{\pi}{4} + 1 \sin \frac{\pi}{4} = -2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y' = 2 \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$(x', y') = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

elde edilir.

4.2. Örnek

$R_{\frac{\pi}{6}}$ dönmesi altında $x^2 - 3y = 6$ denklemini yazınız.

Çözüm

$$R_{\frac{\pi}{6}} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x', y') = \left(x \cos \frac{\pi}{6} + y \sin \frac{\pi}{6}, -x \sin \frac{\pi}{6} + y \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$x' = x \cos \frac{\pi}{6} + y \sin \frac{\pi}{6} = x \frac{3}{2} + y \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y)$$

$$y' = -x \sin \frac{\pi}{6} + y \cos \frac{\pi}{6} = -x \frac{1}{2} + y \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y)$$

ifadeleri $x^2 - 3y = 6$ da yerine konulursa

$$\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \right)^2 - 3 \left(\frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y) \right)^2 = 6$$

$$\frac{1}{4}(3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2) - \frac{3}{4}(x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2) = 6$$

$$2\sqrt{3}xy - 2y^2 = 6$$

elde edilir.

4.3. Örnek

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x', y') = (x \cos\theta + y \sin\theta, -x \sin\theta + y \cos\theta)$$

dönme dönüşümünün, bir eşmetrel dönüşüm olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Düzlemde $A = (x_1, y_1)$ ve $B = (x_2, y_2)$ gibi iki nokta alalım. R_θ dönmesi ile bu noktaların resimleri $A' = (x'_1, y'_1)$, $B' = (x'_2, y'_2)$ olsun. Buna göre

$$R_\theta(x_1, y_1) = (x'_1, y'_1) = (x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta, -x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta)$$

$$x'_1 = x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta$$

$$y'_1 = -x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta$$

ve

$$R_\theta(x_2, y_2) = (x'_2, y'_2) = (x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta, -x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta)$$

$$x'_2 = x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta$$

$$y'_2 = -x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} \\ &= \left([(x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta) - (x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta)]^2 + \right. \\ &\quad \left. [(-x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta) - (-x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta)]^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{[(x_2 - x_1) \cos\theta + (y_2 - y_1) \sin\theta]^2 + [-(x_2 - x_1) \sin\theta + (y_2 - y_1) \cos\theta]^2} \end{aligned}$$

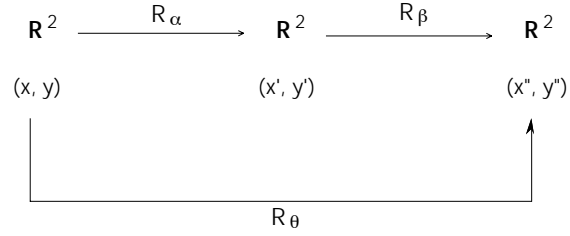
Gerekli işlemler yapıldıktan sonra,

$$|A'B'| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |AB|$$

elde edilir. Uzaklıklar aynı kaldığından R_θ dönme dönüşümü bir eşmetrel dönüşümdür.

5. Dönmelerin Bileşkesi

R_α ve R_β gibi herhangi iki dönmenin bileşkesi yine bir dönme olduğunu görelim.



$$\begin{aligned}
 (R_\beta \cdot R_\alpha)(x, y) &= R_\beta(R_\alpha(x, y)) \\
 &= R_\beta(x \cos \alpha + y \sin \alpha, -x \sin \alpha + y \cos \alpha) \\
 &= ((x \cos \alpha + y \sin \alpha) \cos \beta + (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \sin \beta, \\
 &\quad - (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \sin \beta + (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \cos \beta) \\
 &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) x + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) y, \\
 &\quad - (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) x + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) y \\
 &= (x \cos(\alpha + \beta) + y \sin(\alpha + \beta), \\
 &\quad -x \sin(\alpha + \beta) + y \cos(\alpha + \beta))
 \end{aligned}$$

$\alpha + \beta = \theta$ olsun

$$(R_\beta \cdot R_\alpha)(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) = R_\theta(x, y)$$

olur. Ayrıca,

$$R_\beta \cdot R_\alpha = R_{\beta + \alpha} = R_{\alpha + \beta} = R_\alpha \cdot R_\beta$$

olduğundan, iki dönmenin bileşimi değişimlidir.

6. Düzlemde Öteleme - Dönme ve Dönme - Öteleme

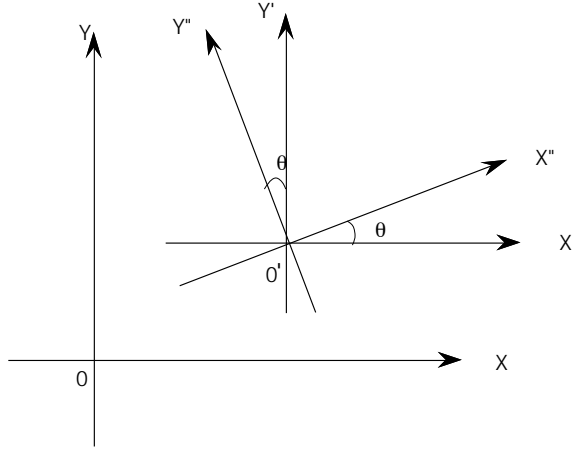
XOY dik koordinat sisteminden, hem başlangıç noktası, hem de eksenlerin doğrultuları farklı olacak şekilde, X''O''Y'' eksen sistemi seçelim. İlk sistemde koordinatları (x, y) olan bir P noktasının, X''O''Y'' eksen sistemindeki, bu noktanın (x'', y'') koordinatları arasındaki bağıntıları araştıralım. Bu bağıntıları bulmak için iki yol izleyebiliriz. Birincisi, önce öteleme sonra dönme, ikincisi ise, önce dönme sonra öteleme ile olur. Buna göre, önce öteleme ile başlayalım. XOY sistemi ile başlangıç noktası (h, k) olan iki sistemde $P = (x, y)$ noktasının koordinatları arasında

$$\begin{aligned}
 x &= x' + h \\
 y &= y' + k
 \end{aligned}$$

bağıntıları vardı. $X'O'Y'$ sisteminin eksenleri $O' = (h, k)$ başlangıç noktası etrafında θ açısı kadar dönmesi ile,

$$\begin{aligned}x' &= x'' \cos \theta - y'' \sin \theta \\y' &= x'' \sin \theta + y'' \cos \theta\end{aligned}$$

dir. (Şekil 5.6)



Şekil 5.6

Kısaca, öteleme-dönme için

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T(h,k)} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{R_\theta} & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & & (x', y') & & (x'', y'') \\ \hline & & & & \uparrow \\ & & & & R_\theta \cdot T(h,k) \end{array}$$

$$\begin{aligned}(R_\theta \cdot T(h,k))(x, y) &= R_\theta(T(h,k)(x, y)) = R_\theta(x - h, y - k) \\ &= ((x - h) \cos \theta + (y - k) \sin \theta, -(x - h) \sin \theta + (y - k) \cos \theta)\end{aligned}$$

Böylece, XOY sistemi ve $X''O''Y''$ sistemi arasında,

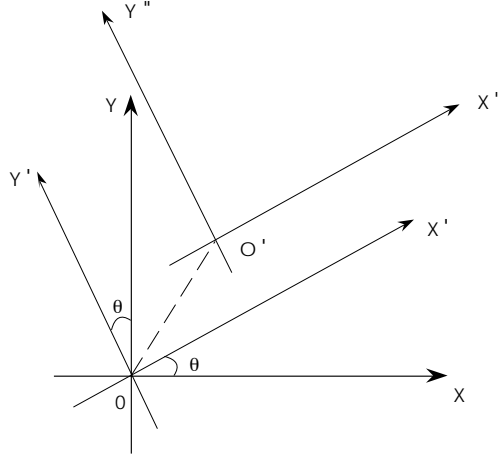
$$\begin{aligned}x'' &= (x - h) \cos \theta + (y - k) \sin \theta \\ y'' &= -(x - h) \sin \theta + (y - k) \cos \theta\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ya da

$$\begin{aligned}x &= x'' \cos \theta - y'' \sin \theta + h \\ y &= x'' \sin \theta + y'' \cos \theta + k\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

bağıntıları bulunur.

Şimdi, bu bağıntıları dönme-öteleme ile elde edelim.



Şekil 5.7

Önce R_θ dönmesi ile $P = (x, y)$ noktasının koordinatları

$$R_\theta(x, y) = (x', y') = (x \cos\theta + y \sin\theta, -x \sin\theta + y \cos\theta)$$

dır. Başlangıç noktası XOY sistemine göre $O' = (h, k)$ olan ve koordinat eksenleri $X'O'Y'$ sisteminin eksenlerine paralel olan $X''O''Y''$ sisteminde bir $P = (x, y)$ noktasının koordinatlarını bulalım. Önce, (h, k) noktasının $X'O'Y'$ sistemindeki koordinatları

$$R_\theta(h, k) = (h \cos\theta + k \sin\theta, -h \sin\theta + k \cos\theta) = (h', k')$$

olarak bulunur.

Sonra $T_{(h', k')}$ ötelemesi ile,

$$\begin{aligned} T_{(h', k')}(x', y') &= T_{(h', k')}(x \cos\theta + y \sin\theta, -x \sin\theta + y \cos\theta) \\ &= (x \cos\theta + y \sin\theta - h', -x \sin\theta + y \cos\theta - k') \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $(T_{(h', k')} \cdot R_\theta)(x, y) = (x'', y'')$

$$\begin{aligned} x'' &= x \cos\theta + y \sin\theta - h' = x \cos\theta + y \sin\theta - (h \cos\theta + k \sin\theta) \\ &= (x - h) \cos\theta + (y - k) \sin\theta \\ y'' &= -x \sin\theta + y \cos\theta - k' = -x \sin\theta + y \cos\theta - (-h \sin\theta + k \cos\theta) \\ &= -(x - h) \sin\theta + (y - k) \cos\theta \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos\theta - y'' \sin\theta + h \\ y &= x'' \sin\theta + y'' \cos\theta + k \end{aligned}$$

bağıntıları bulunur. Buradan görüldüğü gibi dönme-öteleme dönüşümü ile (1) ve (2) bağıntıları elde edilir.

7. Çözümlü Problemler

7.1. XOY dik koordinat sisteminde $P = (2, -1)$ noktası verilsin. Bu noktanın

$R_{\frac{\pi}{6}} \cdot T_{(5, -3)}$ dönüşümü altındaki resmini bulun.

Çözüm

$$R_{\theta} \cdot T_{(h,k)} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x'', y'') = ((x - h) \cos \theta + (y - k) \sin \theta, \\ -(x - h) \sin \theta + (y - k) \cos \theta)$$

dan

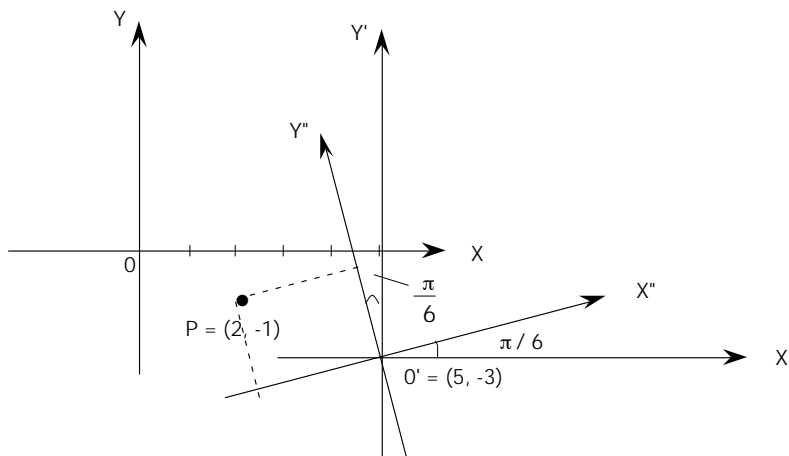
$$R_{\frac{\pi}{6}} \cdot T_{(5, -3)} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(2, -1) \rightarrow (x'', y'') = \left((2 - 5) \cos \frac{\pi}{6} + (-1 - (-3)) \sin \frac{\pi}{6}, \right. \\ \left. -(2 - 5) \sin \frac{\pi}{6} + (-1 - (-3)) \cos \frac{\pi}{6} \right)$$

$$x'' = -3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = -3 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y'' = 3 \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

bulunur. P noktasının $X''O''Y''$ sisteminde koordinatları $\left(-3 \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ dir.



Şekil 5.8

7.2. XOY dik koordinat sisteminde $4x^2 + 9y^2 = 36$ denklemi verilsin. Başlangıç noktası $O' = (1, 0)$ olan ve koordinat eksenleri O' noktası etrafında pozitif yönde $\frac{\pi}{3}$ döndürülerek elde edilen yeni sistemde, verilen denklemi yazınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} (R_{\frac{\pi}{3}} \cdot T_{(1,0)})(x, y) &= R_{\frac{\pi}{3}}(x - 1, y) \\ &= \left((x - 1) \cos \frac{\pi}{3} + y \sin \frac{\pi}{3}, -(x - 1) \sin \frac{\pi}{3} + y \cos \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \left((x - 1) \frac{1}{2} + y \frac{\sqrt{3}}{2}, -(x - 1) \frac{\sqrt{3}}{2} + y \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Buna göre,

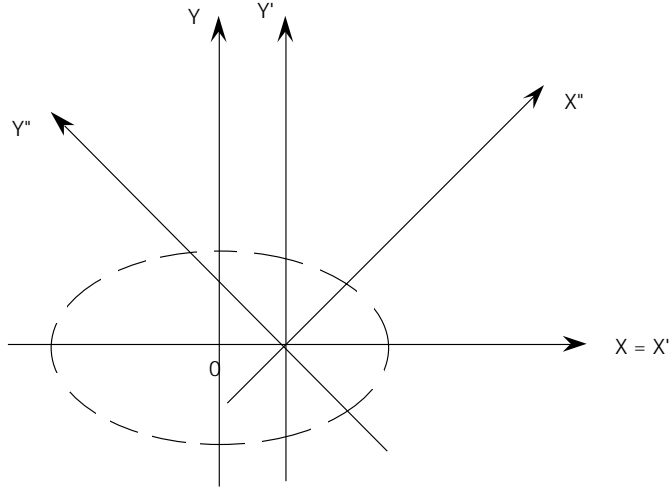
$$x'' = (x - 1) \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y = \frac{1}{2} ((x - 1) + \sqrt{3} y)$$

$$y'' = -(x - 1) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} (-\sqrt{3} (x - 1) + y)$$

dir. Bu bağıntılar $4x^2 + 9y^2 = 36$ da yerine koyularak,

$$4 \left[\frac{(x - 1) + \sqrt{3} y}{2} \right]^2 + 9 \left[\frac{-\sqrt{3} (x - 1) + y}{2} \right]^2 = 36$$

yeni sistemdeki denklem bulunur.



Şekil 5.9

7.3. Bir $T_{(2,1)}$ ötelemesi ile $R_{\frac{\pi}{3}}$ dönmesinin bileşkesinin değişimli (komütatif) olup, olmadığını gösteriniz.

Çözüm

Öteleme-dönme için;

$$\begin{aligned}
(R_{\frac{\pi}{3}} \cdot T_{(2,1)})(x, y) &= R_{\frac{\pi}{3}}(T_{(2,1)}(x, y)) \\
&= R_{\frac{\pi}{3}}(x - 2, y - 1) \\
&= \left((x - 2) \cos \frac{\pi}{3} + (y - 1) \sin \frac{\pi}{3}, -(x - 2) \sin \frac{\pi}{3} + (y - 1) \cos \frac{\pi}{3} \right) \\
x'' &= (x - 2) \frac{1}{2} + (y - 1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
y'' &= -(x - 2) \frac{\sqrt{3}}{2} + (y - 1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2} + \sqrt{3} - \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{1}$$

elde edilir.

Dönme-öteleme için;

$$\begin{aligned}
(T_{(2,1)} \cdot R_{\frac{\pi}{3}})(x, y) &= T_{(2,1)} \left(x \cos \frac{\pi}{3} + y \sin \frac{\pi}{3}, -x \sin \frac{\pi}{3} + y \cos \frac{\pi}{3} \right) \\
&= T_{(2,1)} \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y, -\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2} \right) \\
&= \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y - 2, -\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2} - 1 \right) \\
x'' &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y - 2 \\
y'' &= -\frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{y}{2} - 1
\end{aligned} \tag{2}$$

(1) ve (2) den

$$R_{\frac{\pi}{3}} \cdot T_{(2,1)} \neq T_{(2,1)} \cdot R_{\frac{\pi}{3}}$$

bir öteleme ile dönmenin bileşkesi değişimli değildir.

7.4. $-3x + 5y - 3 = 0$ doğrusu verilsin. Bu doğrunun $R_{\frac{\pi}{2}}$ dönmesine göre, resmin kendisine dik bir doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$R_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = \left(x \cos \frac{\pi}{2} + y \sin \frac{\pi}{2}, -x \sin \frac{\pi}{2} + y \cos \frac{\pi}{2} \right)$$

den

$$x' = x \cos \frac{\pi}{2} + y \sin \frac{\pi}{2} = y$$

$$y' = -x \sin \frac{\pi}{2} + y \cos \frac{\pi}{2} = -x$$

dir. Buna göre,

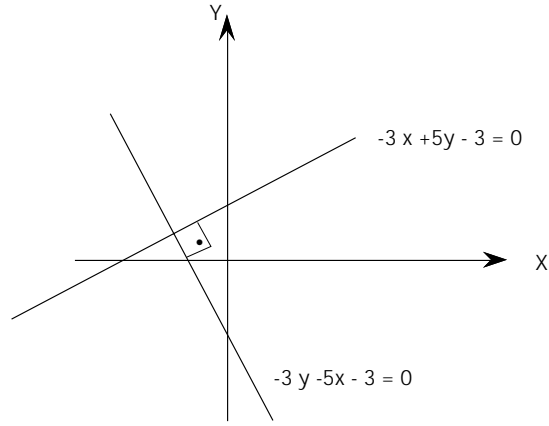
$$-3x + 5y - 3 = 0 \text{ doğrusunun } R_{\frac{\pi}{2}} \text{ dönmesine göre resm:}$$

$$-3(y) + 5(-x) - 3 = 0$$

$$-3y - 5x - 3 = 0$$

$$y = -\frac{5}{3}x - 1$$

doğrusudur. Bu doğrunun eğimi $m_2 = -\frac{5}{3}$ iken $-3x + 5y - 3 = 0$ doğrunun eğimi $m_1 = \frac{3}{5}$ dir. $m_1 \cdot m_2 = \frac{3}{5} \cdot -\frac{5}{3} = -1$ olduğundan, bu iki doğru birbirine diktir.



Şekil 5.10

7.5. $R_{\frac{\pi}{4}} \cdot T_{(-1,2)}$ öteleme-dönme ile resmi $x''^2 - y''^2 + 6 = 0$ olan ifadeyi bulunuz

Çözüm

Burada aradığımız ifadeye önce $T_{(-1,2)}$ dönüşümü, sonra $R_{\frac{\pi}{4}}$ dönüşümü uygulanmıştır. Bunun için üçüncü sistemden, ikinci sisteme geçiş bağıntılarımız $R_{\frac{\pi}{4}}$ ile ilgilidir.

$$R_{\frac{\pi}{4}}(x', y') = \left(x' \cos \frac{\pi}{4} + y' \sin \frac{\pi}{4}, -x' \sin \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4} \right)$$

den,

$$x'' = x' \cos \frac{\pi}{4} + y' \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y')$$

$$y'' = -x' \sin \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-x' + y')$$

bağıntıları

$$x''^2 - 3y''^2 + 6 = 0 \text{ da yerine konulursa,}$$

$$x'^2 - 4x'y' + y'^2 - 6 = 0 \text{ bulunur.}$$

$T_{(-1,2)}$ ötelemesi ile

$T_{(-1,2)}(x, y) = (x - (-1)), y - 2)$ den

$$x' = x + 1$$

$$y' = y - 2$$

bağıntıları ile

$$(x + 1)^2 - 4(x + 1)(y - 2) + (y - 2)^2 - 6 = 0$$

gerekli işlemler yapılarak

$$x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 8y + 7 = 0$$

ifadesi bulunur.

Değerlendirme Soruları

- $R_{\frac{\pi}{2}}$ dönmesine göre $P = (-1, 2)$ noktasının görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A. (2, 0)	B. (-2, -1)	C. (2, 1)
D. (-2, 0)	E. (0, -2)	
- $y^2 - 6y - 3x + 6 = 0$ denkleminin $T_{(-1,3)}$ ötelemesine göre denklemi nedir?

A. $x^2 = 3y$	B. $y^2 = 3x$	C. $y^2 = -3x$
D. $x^2 = -3y$	E. $x = 3y$	
- $x^2 - 6x + 4y + 17 = 0$ denklemini hangi öteleme ile $x^2 = -4y$ şeklinde yazılabilir?

A. $T_{(-2,3)}$	B. $T_{(2,3)}$	C. $T_{(2,-3)}$
D. $T_{(-3,2)}$	E. $T_{(3,-2)}$	
- $R_{\frac{\pi}{4}}$ dönmesine göre resmi $2xy = 1$ olan ifade hangisidir

A. $y^2 - x^2 = 1$	B. $x^2 + y^2 = 1$	C. $2y^2 + 2x^2 = 1$
D. $4y^2 - x^2 = 4$	E. $x^2 - y^2 = 1$	
- Bir $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$
 $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 5)$
 ötelemesi ile resmi $(8, -3)$ olan nokta aşağıdakilerden hangisidir?

A. (-9, 8)	B. (7, -2)	C. (-7, 2)
D. (9, -8)	E. (5, 2)	

6. Aşağıdaki denklemlerden hangisi herhangi bir R_θ dönmesine göre aynı kalır?

- A. $x - y = 1$ B. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ C. $x + y = 1$
 D. $x^2 + y^2 = 1$ E. $y^2 = x$

7. Aşağıdaki dönüşümlerden hangisi bir eşmetrel dönüşümdür?

- A. $x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$ B. $x' = y + 2$ C. $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$
 $y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y$ $y' = 2x - 1$ $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$
 D. $x' = x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$ E. $x' = -y + 2$
 $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + y$ $y' = -x - 1$

8. Aşağıdaki dönüşümlerden hangisi bir eşmetrel dönüşüm değildir?

- A. $x' = -x$ B. $x' = x - 3$ C. $x' = y + 2$
 $y' = -y$ $y' = y + 1$ $y' = 2x - 1$
 D. $x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$ E. $x' = y$
 $y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$ $y' = -x$

9. $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$

$$(x, y) \rightarrow (y, -x)$$

şeklinde tanımlı hareket aşağıdakilerden hangisidir?

- A. Dönme merkezi 0 ve $R_{\frac{\pi}{4}}$
 B. Dönme merkezi 0 ve $R_{\frac{\pi}{2}}$
 C. Dönme merkezi 0 ve $R_{\frac{\pi}{3}}$
 D. Dönme merkezi 0 ve $R_{2\pi}$
 E. Dönme merkezi 0 ve R_{π}

10. $x - y - 5 = 0$ denkleminin aşağıdaki hangi dönme-öteleme dönüşümü uygulanırsa $y = 0$ doğrusu elde edilir.

- A. $T_{\left(0, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)} \cdot R_{\frac{\pi}{4}}$ B. $T_{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, 1\right)} \cdot R_{\pi}$ C. $T_{(0, 5)} \cdot R_{\frac{\pi}{2}}$
 D. $T_{(5, 0)} \cdot R_{\frac{\pi}{6}}$ E. $T_{(-5, 0)} \cdot R_{\frac{\pi}{4}}$

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. C 2. B 3. E 4. A 5. D 6. D 7. E 8. C 9. B 10. A