



T.C. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI NO: 1077  
AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINLARI NO: 597

**MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ**

# *Analitik Geometri*

*Yazar:*

Doç.Dr. Hüseyin AZCAN

*Editör:*

Doç.Dr. Hüseyin AZCAN

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları  
Anadolu Üniversitesine aittir.

"Uzaktan öğretim" tekniğine uygun olarak hazırlanan bu kitabın  
bütün hakları saklıdır.

İlgili kuruluştan izin almadan kitabın tümü ya da  
bölümleri mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt  
veya başka şekillerde çoğaltılamaz,  
basılamaz ve dağıtılamaz.

*Copyright © 1999 by Anadolu University*

*All rights reserved*

*No part of this book may be reproduced  
or stored in a retrieval system, or transmitted  
in any form or by any means mechanical, electronic,  
photocopy, magnetic tape or otherwise, without  
permission in writing from the University.*

Tasarım: Yrd.Doç.Dr. Kazım SEZGİN

ISBN 975 - 492 - 835 - 5

---

# Koordinat Dönüşümleri ve Afın Dönüşümler

Yazar

Doç.Dr.Hüseyin AZCAN

ÜNİTE

6

## Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Düzlemde Yansıma Kavramını,
- Yansıma-Dönme İlişkisini,
- Düzlemin Kolinasyonlarını
- Düzlemin Afın Dönüşümlerini Öğreneceksiniz.

## İçindekiler

- Giriş 109
  - Düzlemde Yansıma 109
  - Yansıma - Dönme İlişkisi 110
  - Düzlemin Afın Dönüşümleri 111
  - Afın Dönüşümlerin Belirlenmesi 116
  - Özet 122
  - Değerlendirme Soruları 123
-

---

## Çalıřma Önerileri

Bu üniteyi daha iyi kavrayabilmek için;

- Düzlemin eşmetrel dönüşümlerini gözden geçiriniz.
- Lineer Cebir derslerinde öğrendiğiniz matrisler ve lineer dönüşümler kavramlarını tekrar gözden geçiriniz.
- Bir matrisin tersinin nasıl bulunduğunu gözden geçiriniz.

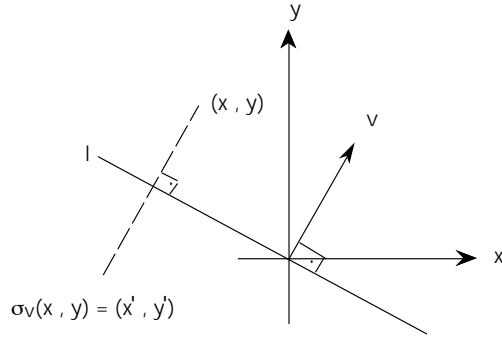
## 1. Giriş

Şimdiye kadar düzlemde iki önemli eşmetrel dönüşüm sınıfı gördük, bunlar dönme ve ötelemelerdir. Ötelemeler bir anlamda düzlemin başlangıç noktasının seçimi olmasına karşın dönme düzlemde hem başlangıç noktasının hem de eksenlerin seçimleridir. Şimdi bunlardan daha genel bir eşmetrel dönüşüm sınıfını görelim. Adına yansıma diyeceğimiz bu eşmetrel dönüşümleri inceleyelim.

## 2. Düzlemde Yansıma

Düzlemde bir  $v$  birim vektörü verilsin.  $l$  düzlemde  $v$  vektörüne dik doğruyu göstermek üzere düzlemde her noktayı  $l$  doğrusuna göre simetrigine (ayna görüntüsüne) gönderen fonksiyona ( $v$  ye göre) **yansıma** denir.

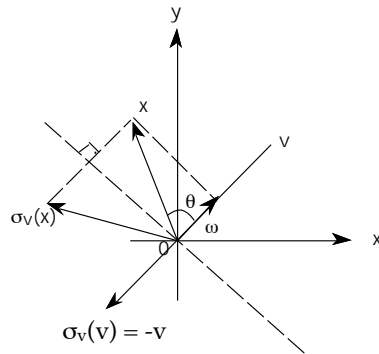
Standart gösterime de saygı duyarak  $v$  ye göre yansımayı  $\sigma_v$  ile göstereceğiz.



Şekil 6.1: Düzlemde  $v$  Vektörüne Göre Yansıma

Bu tanımda  $v$  ye dik doğrunun simetri eksenini seçilmesi yadırganabilir. Fakat bu seçim yüksek boyutlu uzaylara doğal bir şekilde taşınır.

Şimdi yansıma dönüşümünün analitik ifadesini elde edelim:

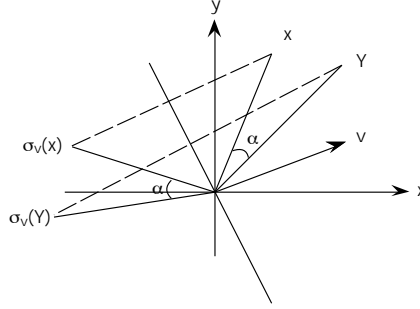


Verilen bir  $v$  birim vektörü ve keyfi bir  $X = (x, y)$  noktası alalım.  $X$  vektörünün  $v$  vektörü üzerine dik izdüşüm vektörüne  $\omega$  dersek, apaçık olarak  $\sigma_v(x) = X - 2\omega$  dir. O halde yalnızca  $\omega$  vektörünü hesaplamalıyız. Diğer yandan  $\omega$  vektörü  $v$  vektörü yönünde olduğundan  $\vec{\omega} = |\omega| \vec{v}$  şeklindedir. Yani yalnızca  $\omega$  vektörünün boyu olan  $|\omega|$  yı bulmalıyız. Bu ise  $|x| \cos \theta$  dir. Diğer yandan

$$\cos \theta = \frac{X \cdot v}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} \quad \text{olduğundan} \quad (v \cdot v = 1) |\omega| = |x| \frac{X \cdot v}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = x \cdot v \quad \text{olur. O hald}$$

$$\sigma_v(x, y) = (x, y) - 2[(x, y) \cdot (v_1, v_2)] (v_1, v_2)$$

elde edilir. Köşeleri  $0, x$  ve  $\sigma_v(x)$  olan üçgende  $x$  i  $\sigma_v(x)$  e birleştiren doğrunun orta dikmesi  $l$  doğrusu ile çakıştığından  $x = \sigma_v(x)$  olur. Açık olarak  $\sigma_v(v) = -v$  dir. O halde  $x \cdot v = \sigma_v(x) \cdot \sigma_v(v)$  dir. Diğer yandan başka bir  $Y$  vektörü için  $Y \cdot v = \sigma_v(Y) \cdot \sigma_v(v)$  olduğundan  $x - Y = \sigma_v(x) - \sigma_v(Y)$  olur. Basitçe



$X$  ve  $Y$  vektörlerini boyları korunduğu ve  $X \cdot v = \sigma_v(x) \cdot \sigma_v(v)$  ve  $Y \cdot v = \sigma_v(Y) \cdot \sigma_v(v)$  olduğundan  $X$  ve  $Y$  vektörleri arasındaki açı  $\sigma_v(x)$  ve  $\sigma_v(Y)$  vektörleri arasında açıya eşittir. O halde  $XOY$  üçgeni ile  $\sigma_v(x) O \sigma_v(Y)$  üçgenlerinin diğer iki kenarının uzunlukları da eşittir.

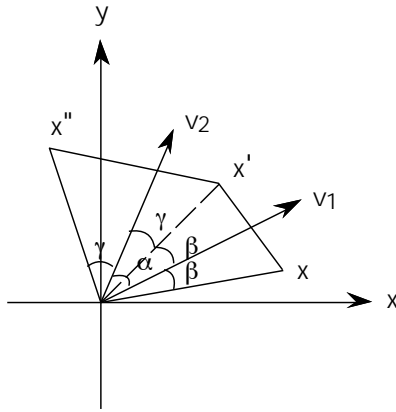
Özet olarak yansıma dönüşümü vektörlerin uzunluklarını ve aralarındaki açıları korur.

### 3. Yansıma - Dönme İlişkisi

Yansıma ile dönme dönüşümleri temel olarak oldukça farklı dönüşümlerdir. Bir önceki bölümde gördüğümüz gibi birimden farklı bir  $R_\theta$  dönmesi için  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid R_\theta(x) = x\}$  dönme dönüşümünün sabit noktaları kümesi yalnızca başlangıç noktasından ibarettir. (Böyle bir noktaya bir sabit nokta denir.) Yani bir  $R_\theta$  dönmesinin sabit nokta kümesi ya tek nokta  $(0, 0)$  ya da bütün düzlemdir ( $\theta = 0$  ise  $R_\theta$  dönüşümü birim dönüşüm olur ve bütün düzlemi sabit bırakır). Fakat yansıma için durum farklıdır. Eğer  $x \cdot v = 0$  ise  $\sigma_v(x) = x$  yani  $v$  ye dik doğrunun her noktası  $\sigma_v$  yansımasının sabit noktasıdır. O halde bir yansımanın sabit nokta kümesi bir doğrudur; o halde hiç bir yansıma bir dönme olarak elde edilemez.

### 3.1. İki Yansımanın Bileşkesi

$v_1$  ve  $v_2$  iki birim vektör olmak üzere şimdi  $\sigma_{v_1} \circ \sigma_{v_2}$  iki yansımanın bileşkesini hesaplayalım. Öncelikle sezgisel olarak şunu hemen söyleyebiliriz.  $\sigma_{v_1}$  in sabit nokta kümesi  $l_1$  doğrusu ve  $\sigma_{v_2}$  nin sabit nokta kümesi  $l_2$  doğrusu olacağından  $\sigma_{v_1} \circ \sigma_{v_2}$  nin sabit nokta kümesi  $l_1 \cap l_2$  kümesi olacaktır. Eğer  $l_1$  ve  $l_2$  paralel değil ise  $l_1 \cap l_2 = \{0\}$  tek başlangıç noktasından oluşur. O halde yansımaların bileşkesi bir yansıma olamaz ama tek sabit noktası olmasından dolayı bir dönme olabilir. Bu ise gerçekten oluşan durumdur. Eğer  $v_1$  ve  $v_2$  vektörleri arasındaki açı  $\alpha$  ise  $\sigma_{v_1} \circ \sigma_{v_2} = R_{2\alpha}$  dır. Şimdi bunu kabaca Şekil 6.2 üzerinde  $v_1$  ve  $v_2$  simetrisi için görelim.



Şekil 6.2: İki Yansımanın Bileşkesi

Şekil 6.2'ye göre dönme açısı  $2\beta + 2\gamma = \alpha + \alpha = 2\alpha$  olur. Bu şekli kullanarak detaylı ispatını siz vermeye çalışınız.

## 4. Düzlemin Afin Dönüşümleri

Buraya kadar düzlemin eşmetrel dönüşümlerini inceledik. Kabaca bir anlamda **uzaklık geometrisi** yaptık. Fakat geometriye yalnızca uzaklık açısından bakmak yeterli değildir. Geometrinin noktalar kümesi, doğrular kümesi ve üzerinde bulunma bağıntısı ile verildiği anımsanırsa, üzerinde bulunmayı koruyan dönüşümlerin geometri için ne denli kaçınılmaz olduğu anlaşılabilir. Şimdi bu bağlamda üzerinde bulunmayı koruyan dönüşümlerle ilgilenelim; yani **üzerinde bulunma geometrisi** yapalım. A açık olarak her eşmetrel dönüşüm üzerinde bulunma bağıntısını korur, o halde üzerinde bulunmayı koruyan dönüşümler düzlemin daha geniş bir dönüşümleri kümesidir. Başlangıç olarak  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  dönüşümü ile başlayalım. Bu dönüşüm düzlemin noktaları üzerinde tanımlı olduğundan, doğrular kümesi üzerinde nasıl davrandığını hemen söylemek kolay değildir. Eğer böyle bir dönüşüm doğruları doğrulara resmediyor ise bu dönüşüm üzerinde bulunma bağıntısını korumak zorundadır. Doğruların doğrulara resmedil-

mesini düzlemin noktaları cinsinden karakterize etmeye çalışırsak bu bizi **kolinasyon** kavramına götürür.

**Tanım [Kolinasyon]:**  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  bire bir ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer aynı doğru üzerinde olan her  $\{P, Q, R\} \subseteq \mathbf{R}^2$  üçlüsü için  $\{T(P), T(Q), T(R)\} \subseteq \mathbf{R}^2$  görüntü üçlüsü de aynı doğru üzerinde oluyor ve tersine aynı doğru üzerinde olan her  $\{T(P), T(Q), T(R)\} \subseteq \mathbf{R}^2$  üçlüsü için  $\{P, Q, R\} \subseteq \mathbf{R}^2$  üçlüsü de aynı doğru üzerinde ise  $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  dönüşümüne bir **kolinasyon** denir.

Bu tanım sezgisel olarak çok şey ifade etmesine karşın hesaplamalarda direkt kullanılışı zordur. Tam bu noktada afin dönüşüm kavramına gereksinim duyulur. Şimdi afin dönüşümleri tanımlayalım.

**Tanım [Afin Dönüşüm]:**  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$   $2 \times 2$  tipinde ters çevrilebilir bir matris ve  $(e, f) \in \mathbf{R}^2$  olmak üzere

$$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme düzlemin bir **afin dönüşümüdür** denir. Burada dikkat ederseniz  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  vektörü için  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  gösterimini kullandık. Bu gösterimi matris çarpımı ile uyumlu olarak çalıştığı için tercih ettik.  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dönüşümü mü açık olarak yazacak olursak;

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Bu dönüşüm alışıldık gösterimle

$$T(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$$

şeklinde düşünülmelidir. Şimdi  $P = (x_0, y_0)$  noktasının  $T$  afin dönüşümü altında görünsünün  $T(P)$  olduğunu kabul edersek,  $\lambda \in \mathbf{R}$  olmak üzere

$$T(\lambda P) = T \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \end{pmatrix} = \lambda A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ dir. Çünkü:}$$

$$\begin{aligned} T(\lambda P) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= \lambda A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ dir.} \end{aligned}$$

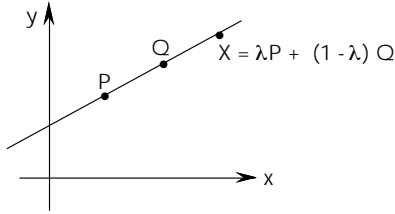
Diğer yandan  $Q = (x_1, y_1)$  şeklinde bir noktası için

$$\begin{aligned} T(P+Q) &= A(P+Q) + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ dir.} \\ &= A(P) + A(Q) + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = T(P) + T(Q) - \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Şimdi bu hazırlıklardan sonra  $P$  ve  $Q$  noktalarının belirlediği doğrunun  $T$  altındaki görüntüsünü bulalım. Bu doğru üzerindeki keyfi bir  $X$  noktası

$$X = \lambda P + (1 - \lambda) Q$$

şekindedir.



$$T(X) = T(\lambda P + (1 - \lambda) Q)$$

$$\begin{aligned} &= T(\lambda P) + T((1 - \lambda) Q) - \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= \lambda A(P) + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + (1 - \lambda) T(Q) + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= \lambda A(P) + (1 - \lambda) A(Q) + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

diğer yandan  $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

yazılırsa

$$T(x) = \lambda T(P) + (1 - \lambda) T(Q) \text{ olur.}$$

Yani afin dönüşümler düzlemin doğrularını yine doğrulara taşır.

Şimdi bir örnekle konuyu açalım.

### Örnek

$P = (1, 0)$  ve  $Q = (1, -1)$  noktalarını  $T(P) = (2, -1)$  ve  $T(Q) = (1, +1)$  noktalarına götüren bir afin dönüşüm bulunuz.

**Çözüm**

Böyle bir dönüşümün P ve Q noktaları tarafından belirlenen doğru üzerinde nasıl davranacağını yukarıdan biliyoruz. Buna göre

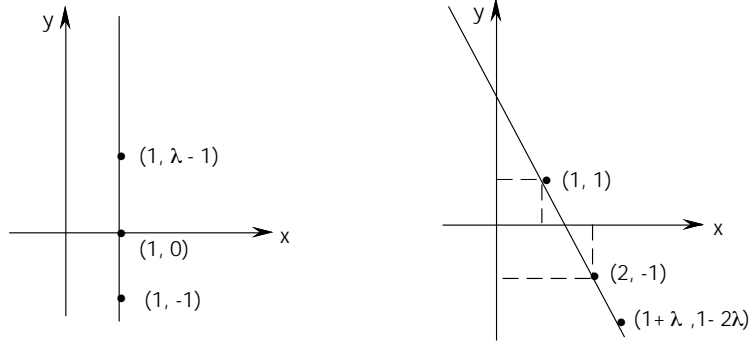
$$\begin{aligned}(x, y) &= \lambda P + (1 - \lambda) Q = \lambda (1, 0) + (1 - \lambda) (1, -1) \\ &= (\lambda, 0) + (1 - \lambda, \lambda - 1) \\ &= (1, \lambda - 1) \text{ ise}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(x, y) &= T(\lambda P + (1 - \lambda) Q) \\ &= \lambda T(P) + (1 - \lambda) T(Q) \\ &= \lambda (2, -1) + (1 - \lambda) (1, -1) \\ &= (2\lambda, -\lambda) + (1 - \lambda, 1 - \lambda) \\ &= (1 + \lambda, 1 - 2\lambda)\end{aligned}$$

$(x, y) = (1, \lambda - 1)$  olduğundan  $1 = x$  ve  $\lambda = 1 + y$  yazarsak

$$\begin{aligned}T(x, y) &= (x + y + 1, x - 2(1 + y)) \\ &= (x + y + 1, x - 2y - 2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ olur.}\end{aligned}$$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$  olduğunda  $T(x, y)$  bir afin dönüşümdür ve istenilen koşulları sağlar. Geometrik olarak



Şimdi düzlemi afin dönüşlerinin bire-bir ve örten olduklarını da görelim.

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$  için  $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  olacak şekilde bir  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$  noktasının olduğunu gösterirsek  $T$  dönüşümünün örten olduğunu göstermiş oluruz.

Bu özellik ise A matrisinin ters çevrilebilir oluşu ile garantilenir.

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ ise}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - a \\ \beta - b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} \alpha - a \\ \beta - b \end{pmatrix}$$

çözümüne ulaşılır. Diğer yandan bu çözüm **tek türlü belirgin** olduğundan T bire birdir.

O halde düzlemin her afin dönüşümü düzlemin bir kolinasyonudur. Bunun tersi de doğrudur fakat bunu bu kitapta kanıtlamayacağız, fakat kanıtsız olarak kullanacağız. Bu sonucu tekrar vurgulayacak olursak:

$$\{\text{Düzlemin kolinasyonları}\} = \{\text{Düzlemin afin dönüşümleri}\}$$

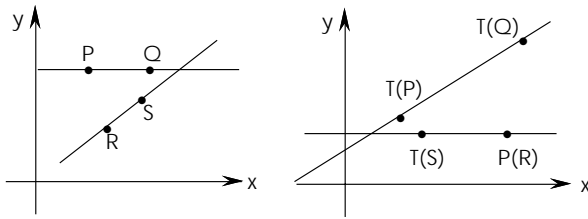
diyebiliriz. Diğer önemli bir sonucumuz ise istenilen özellikleri sağlayan bir afin dönüşümü inşa etmek için çok önemli olan:

$T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  afin dönüşümü PQ doğrusuna ait  $X = \lambda P + (1 - \lambda) Q$  noktasının görüntüsü

$$T(x) = \lambda T(P) + (1 - \lambda) T(Q) \text{ dur.}$$

Şimdi paralel ve kesişen doğruların afin dönüşümler altında görüntülerinin özelliklerini belirleyelim.

$T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  bir afin dönüşüm ve P, Q, R, S düzlemde herhangi üç tanesi aynı doğru üzerinde bulunmayan noktalar olsunlar. T dönüşümü  $P \rightarrow T(P)$ ,  $Q \rightarrow T(Q)$ ,  $R \rightarrow T(R)$  ve  $S \rightarrow T(S)$  olduğunu kabul edersek PQ doğrusunun görüntüsü  $T(P) T(Q)$  doğrusu ve RS doğrusunun görüntüsü  $T(R) T(S)$  doğrusu olur.



Eğer PQ ve RS doğruları bir X noktasında kesişiyorlarsa bu X noktası PQ doğrusu üzerinde olduğundan uygun  $\lambda \in \mathbf{R}$  için  $X = \lambda P + (1 - \lambda)Q$  ve aynı X noktası RS doğrusu üzerinde olduğundan uygun bir  $\mu \in \mathbf{R}$  için  $X = \mu R + (1 - \mu)S$  dir.

Yani

$$X = \lambda P + (1 - \lambda)Q$$

$$X = \mu R + (1 - \mu)S$$

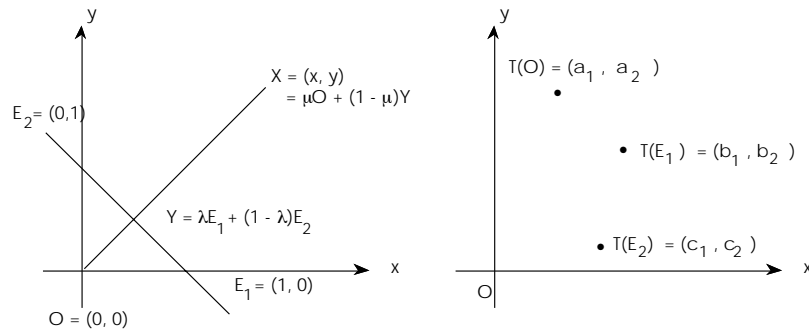
$$\begin{aligned} \text{dir. O halde } T(X) &= \lambda T(P) + (1 - \lambda) T(Q) \\ T(X) &= \mu T(R) + (1 - \mu) T(S) \end{aligned}$$

olmalıdır. Yani kesişen iki doğrunun görüntü doğruları kesişir ve görüntü doğruların kesişme noktası orjinal doğruların kesişme noktasının görüntüsüdür. Yukarıda verilen tartışmayı benzer bir biçimde kullanarak görüntü olarak ortaya çıkan iki doğru kesişiyorsa bu iki doğrunun ters görüntüleri de kesişirler. Özetleyecek olursak düzlemin iki doğrusunun kesişmesi için gerekli ve yeterli koşul bu iki doğrunun afin bir dönüşüm altında ki görüntülerinin de kesişmeleridir. Diğer yandan bunun doğrudan bir sonucu olarak:

$T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  afin dönüşümü altında kesişmeyen (paralel) doğruların görüntüleri de kesişmezler (paraleldirler).

## 5. Afin Dönüşümlerin Belirlenmesi

Düzlemde verilen iki noktayı verilen iki noktaya götüren bir afin dönüşümün varlığını ve nasıl inşa edildiğini gördük. Ne varki bu özellikleri sağlayan bir afin dönüşüm sonsuz farklı şekilde seçilebilir. (Bunu görmeye çalışınız). Şimdi bir afin dönüşümün aynı doğru üzerinde bulunmayan üç noktanın görüntüsü ile tek türlü belirgin olduğunu gösterelim. Yani bir afin dönüşümün ne olduğunu bilmek için sadece aynı doğru üzerinde olmayan üç noktanın görüntülerini bilmek yeterlidir. İlk olarak düzlemde  $O = (0, 0)$ ,  $E_1 = (1, 0)$  ve  $E_2 = (0, 1)$  noktalarını  $T(O) = (a_1, a_2)$ ,  $T(E_1) = (b_1, b_2)$  ve  $T(E_2) = (c_1, c_2)$  resmeden bir afin dönüşümün var ve tek olduğunu görelim. Böyle bir dönüşüm şu şekilde inşa edilebilir.



Şekilde ki gibi düzlemde  $OX$  doğrusu  $E_1E_2$  doğrusuna paralel olmayacak şekilde alınan bir  $X$  noktasının görüntüsü:

$$\begin{aligned} T(X) &= \mu T(O) + (1 - \mu) T(Y) \\ &= \mu T(O) + (1 - \mu) [\lambda T(E_1) + (1 - \lambda) T(E_2)] \\ &= \mu T(O) + \lambda(1 - \mu) T(E_1) + (1 - \lambda)(1 - \mu) T(E_2) \end{aligned}$$

$T(O)$ ,  $T(E_1)$  ve  $T(E_2)$  noktalarının ne olduklarını bildiğimiz için yalnızca  $\mu$ ,  $\lambda(1 - \mu)$  ve  $(1 - \lambda)(1 - \mu)$  yü  $x$  ve  $y$  cinsinden yazmalıyız. Orjinal  $x$  noktasına bakarsak:

$$\begin{aligned}
(x, y) &= \mu(0, 0) + (1 - \mu) [\lambda(1, 0) + (1 - \lambda)(0, 1)] \\
&= \lambda(1 - \mu)(1 - 0) + (1 - \mu)(1 - \lambda)(0, 1) \\
&= (\lambda(1 - \mu), 0) + (1 - \mu)(1 - \lambda) \\
&= (\lambda(1 - \mu), (1 - \lambda)(1 - \mu))
\end{aligned}$$

den

$$x = \lambda(1 - \mu) \text{ ve } y = (1 - \lambda)(1 - \mu) \text{ olur.}$$

$$x = \lambda(1 - \mu) \Leftrightarrow \lambda = \frac{x}{1 - \mu} \quad (\mu \neq 1 \text{ dir. Çünkü } \mu = 1 \text{ ise } x = 0 \text{ olur})$$

$$\Rightarrow y = (1 - \lambda)(1 - \mu) = \left(1 - \frac{x}{1 - \mu}\right)(1 - \mu)$$

$$\Rightarrow y = (1 - \mu - x) \Leftrightarrow \mu = 1 - x - y \text{ elde edilir.}$$

O halde

$$\begin{aligned}
T(X) &= (1 - x - y) T(0) + x T(E_1) + y T(E_2) \\
&= T(0) + x(T(E_1) - T(0)) + y(T(E_2) - T(0)) \\
&= (a_1, a_2) + x(b_1 - a_1, b_2 - a_2) + y(c_1 - a_1, c_2 - a_2) \\
&= (a_1 + x(b_1 - a_1) + y(c_1 - a_1), a_2 + x(b_2 - a_2) + y(c_2 - a_2))
\end{aligned}$$

yani matris gösterimiyle

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

olur.

Burada elde edilen  $A = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}$  matrisinin determinanı sıfırdan

farklıdır. Çünkü bu determinant  $T(0)$ ,  $T(E_1)$  ve  $T(E_2)$  noktalarını köşe kabul eden üçgenin alanının iki katına eşittir. Sanırım bunu da siz gösterebilirsiniz.

Şimdi bunun tersini de yapabiliriz. Yani düzlemde  $P = (a_1, a_2)$ ,  $Q = (b_1, b_2)$  ve  $R = (c_1, c_2)$  noktalarını  $T(P) = (0, 0)$ ,  $T(Q) = (1, 0)$  ve  $T(R) = (0, 1)$  noktalarına götüren dönüşüm yukarıda elde ettiğimiz afin dönüşümün fonksiyon olarak ters fonksiyonudur. Başka bir deyişle

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

matris denkleminde  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  vektörünü bulmalıyız.

Bu ise

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

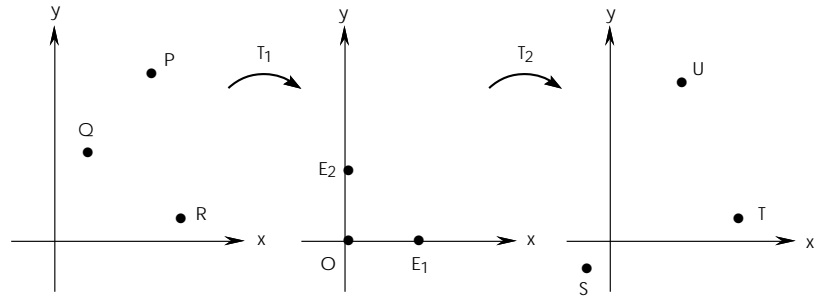
$$\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada kolayca görüleceği gibi

$$\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1)} \begin{pmatrix} c_2 - a_2 & a_1 - c_1 \\ b_2 - a_2 & b_1 - a_1 \end{pmatrix}$$

dir.

Bu ara tartışmalardan sonra asıl hedefimize rahatlıkla ulaşabiliriz. Aynı doğru üzerinde bulunmayan  $P, Q, R$  noktalarının aynı doğru üzerinde bulunmayan  $S, T, U$  noktalarına götüren afin dönüşümü iki aşamada buluruz.



Önce  $T_1$  ile  $P, Q, R$  noktalarını  $O, E_1, E_2$  noktalarına götürür, sonra  $T_2$  yardımıyla  $O, E_1, E_2$  noktalarını  $S, T, U$  noktalarına götürürüz. Yani istenen dönüşüm  $T = T_2 \circ T_1$  olur.

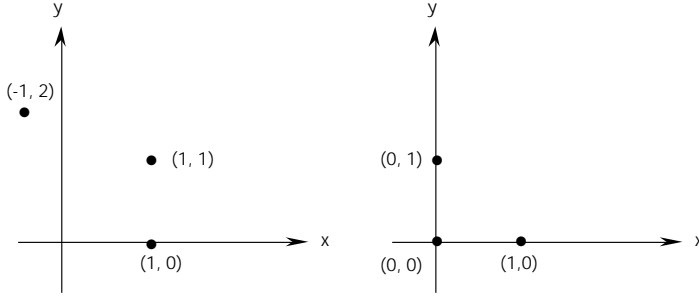
Şimdi bir örnekle pekiştirelim.

### Örnek

$(1, 0), (1, 1), (-1, 2)$  noktalarını sırasıyla  $(0, 1), (1, -1), (1, -2)$  noktalarına resmeden afin dönüşümü bulunuz.

### Çözüm

Önce  $(1, 0), (1, 1), (-1, 2)$  noktalarını  $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$



noktalarına taşıyan afin dönüşümü bulalım.

Kanıtta kullandığımız noktalar cinsinden

$$(1, 0) = (a_1, a_2), (1, 1) = (b_1, b_2) \text{ ve } (-1, 2) = (c_1, c_2) \text{ dir.}$$

O halde

$$A = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Yani

$$\begin{aligned} T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Benzer şekilde  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  noktalarını  $(0, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, -2)$  noktalarına resmeden  $T_2$  afin dönüşümü de

$$(0, 1) = (a_1, a_2), (1, -1) = (b_1, b_2) \text{ ve } (1, -2) = (c_1, c_2)$$

atamaları kullanılarak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ ve dolayısıyla}$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ olur}$$

Sonuç olarak istenen dönüşüm:

$$\begin{aligned}
 T &= T_2 \circ T_1 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ elde edilir.}
 \end{aligned}$$

Emin olmak için problemde verilen noktaların görüntülerini bulduğunuz dönüşümde kontrol edelim:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 4 + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Görüldüğü gibi istenilen koşullar sağlanmış olur.

Afin dönüşümler biraz karmaşık görünmesine karşın geometrinin dönüşümleri üzerinde tam bir hakimiyet kurmamızı sağlar. Şimdi eş metrel dönüşümlerle afin dönüşümler aralarındaki ilişkileri netleştirelim. Eğer bir  $T$  afin dönüşüm eş-metrel ise öncelikle

$$\begin{aligned}
 1 &= d((0, 0), (1, 0)) = d(T(0, 0), T(1, 0)) \\
 1 &= d((0, 0), (0, 1)) = d(T(0, 0), T(0, 1)) \\
 \sqrt{2} &= d((1, 0), (0, 1)) = d(T(1, 0), T(0, 1))
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

sağlanmalıdır.  $T$  nin açık yazılışının

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edersek

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e \\ c+f \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+e \\ d+f \end{pmatrix} \quad \text{olur}$$

Buradan

$$d\left(T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$d\left(T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{b^2 + d^2}$$

$$d\left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2}$$

olur. Eğer T eş metrel ise (6.1) eşitliğini kullanılarak

$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1 \quad \text{ve} \quad ab + cd = 0$$

sonuçlarını elde ederiz.  $a^2 + c^2 = 1$  olduğundan uygun bir  $\theta$  açısı için  $a = \cos\theta$ ,  $c = \sin\theta$  ve  $b^2 + d^2 = 1$  olduğundan uygun bir  $\varphi$  açısı için  $b = \sin\varphi$ ,  $d = \cos\varphi$  yazılabilirler. Bu durumda

$$ab + cd = \cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi = \sin(\theta + \varphi) = 0$$

olur. Yani  $\theta + \varphi = \pi$  olur.

$\theta + \varphi = k\pi \Leftrightarrow \theta = k\pi - \varphi$ . Burada açılarının sinüs ve kosinüslerini alacağımızdan  $k$ 'nin 0 ve 1 değerleri önemlidir,  $k$ 'nin diğer değerleri bu duruma indirgenebilir.  $\theta = -\varphi$  ise

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin\varphi \\ \sin(-\varphi) & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

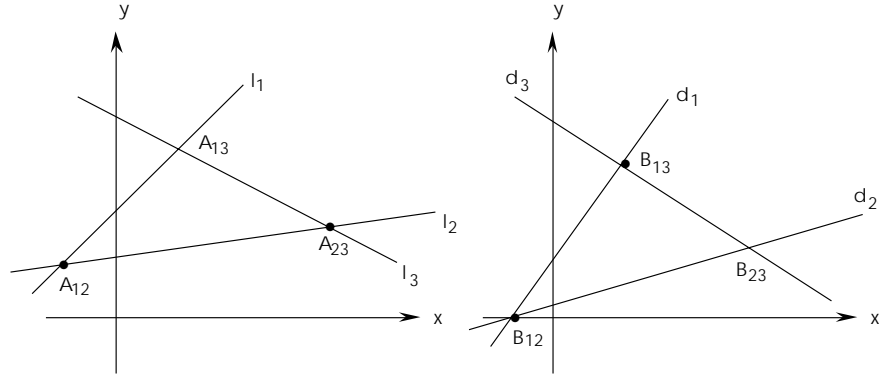
$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

olur.

$\theta = \pi - \varphi$  ise

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\pi - \varphi) & \sin\varphi \\ \sin(\pi - \varphi) & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumlardan birinci dönme ve öteleme ikincisi ise yansıma ve ötelemedir. Böylece düzlem geometrinin en genel dönüşümleri sınıfını kabaca incelemiş olduk. Afin dönüşümler üzerine hâlâ çok şey söylenebilir. Afin dönüşümleri inşa ederken kullandığımız özellikleri benzer biçimlerde kullanarak daha önce incelediğimiz dönme, öteleme, yansıma gibi dönüşümleri inşa edebilirsiniz. Son olarak bir afin dönüşümü herhangi iki tanesi paralel olmayan üç doğrunun görüntüleri ile de belirlenebileceğini görelim. Yani düzlemde  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  ve  $i \neq j$  için  $l_i \cap l_j \neq \emptyset$  özelliğini sağlayan  $l_1, l_2, l_3$  doğrularını yine  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  ve  $i \neq j$  için  $d_i \cap d_j \neq \emptyset$  doğrularına resmeden afin bir dönüşüm aşağıdaki şekilde inşa edilebilir.



Doğruları ve bunların kesişme noktalarını şekildedeki gibi işaretleyelim. Afin dönüşümlerin özelliğinden dolayı  $A_{13}, A_{12}, A_{23}$  noktaları da  $B_{13}, B_{12}, B_{23}$  noktalarına resmedilmek zorunda olduğundan, problem daha önce çözüme kavuşturduğumuz forma indirgenmiş oldu.

## Özet

*Bu bölümde bir geometride en az eşmetrel dönüşümler kadar önemli olan kolinasyonları inceledik. Özel olarak düzlemde kolinasyonlar kümesinin afin dönüşümler kümesi olarak adlandırdığımız daha kolay hesaplanabilir bir kümeye eşit olduğunu gördük. Bunlara ilaveten düzlemin bir kolinasyonunun doğrudan olmayan üç noktanın doğrudan olmayan görüntüsüyle tek türlü belirgin olarak inşa edilebileceğini gördük. Bunun yanında kısaca düzlemin bir anlamda eşmetrel dönüşümler kümesinin üreteçleri olan yansımalara göz attık.*

## Değerlendirme Soruları

- Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?
  - Öteleme iki yansımanın bileşkesi olarak yazılabilir.
  - Dönme iki yansımanın bileşkesi olarak yazılabilir.
  - Yansıma dönmelerin bileşkesi olarak yazılabilir.
  - { c }
  - { b , c }
  - { a , b , c }
  - { a , b }
  - { a }
- f ve g düzlemde sırasıyla  $x = 1$  ve  $x = 3$  doğrularına göre simetri olur. Bu durumda fog dönüşümü hangi  $T_{(a,b)}$  ötelemesidir.
  - $T_{(1,0)}$
  - $T_{(2,0)}$
  - $T_{(3,0)}$
  - $T_{(1,1)}$
  - $T_{(0,1)}$
- $T(1, 1) = (2, 1)$  ,  $T(3, 5) = (8, -1)$  ,  $T(1, -2) = (-1, 4)$  özelliklerini sağlayan afin dönüşümü bulunuz.
  - $T(x, y) = (x + y, x - y)$
  - $T(x, y) = (x + y, x - y + 1)$
  - $T(x, y) = (2x, y)$
  - $T(x, y) = (-x, y + 1)$
  - $T(x, y) = (2x, x - y + 1)$
- $T(x, y) = (2x + y - 1, x + y)$  afin dönüşümünün sabit nokta kümesini bulunuz.
  - $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x + 1\}$
  - $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0\}$
  - $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0, y = 1\}$
  - $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 1, x = 1\}$
  - $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x - 1\}$
- $T(x, y) = (y, x)$  dönüşümünün sabit nokta kümesini bulunuz.
  - $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x\}$
  - $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 2, x = 2\}$
  - $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = -x\}$
  - $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0, y = 0\}$
  - $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y\}$

6. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?  
 a) Bir afin dönüşümün sabit noktası olmayabilir.  
 b) Bir afin dönüşümün sabit noktası tek nokta olmayabilir.  
 c) Bir afin dönüşümün sabit noktası bir doğru olmayabilir.  
 A. { a , b }  
 B. { a b c }  
 C. { a , c }  
 D. { b , c }  
 E. { b }
7. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?  
 a) Afin dönüşümlerin bileşkesi afin dönüşümdür.  
 b) Afin dönüşümler ters çevrilebilir.  
 c) Afin dönüşümlerin toplamları afin dönüşümdür.  
 A. {a}  
 B. {b}  
 C. {c}  
 D. {a, b}  
 E. {a, b, c}
8. Aşağıdaki dönüşümlerden hangisi afin değildir?  
 A.  $T(x, y) = (x, y)$   
 B.  $T(x, y) = (x + 1, x + 2)$   
 C.  $T(x, y) = (y + 1, x)$   
 D.  $T(x, y) = (2x, y)$   
 E.  $T(x, y) = (x + y, x - 2)$
9.  $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$  dönüşümü altında  $x + y = 1$  doğrusunun görüntüsünü bulunuz?  
 A.  $y = 3x + 1$   
 B.  $x = 1$   
 C.  $x = 3y + 1$   
 D.  $x = 1, y = 3x + 1$   
 E.  $x = y$
10. Aşağıdaki afin dönüşümlerden hangisi uzaklığı korur?  
 A.  $T(x, y) = (x + y, x - y)$   
 B.  $T(x, y) = (x - y + 1, x - y - 1)$   
 C.  $T(x, y) = (y + 3, -x + 1)$   
 D.  $T(x, y) = (x + 3, 2x + y)$   
 E.  $T(x, y) = (x - 2y, x + 2y)$

---

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D 2. B 3. B 4. C 5. A 6. B 7. D 8. B 9. B 10. C