Konikler

ÜNİTE
7

Yazar
Doç.Dr. Hüseyin AZCAN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- lise yıllarından da tanıdığınız çember, elips, parabol ve hiperbol gibi konik kesitleri olarak adlandırılan geometrik nesneleri yakından tanıyacak ve bunların keyfi bir dik koordinat sisteminde denklemlerini elde edebileceksiniz.

İçindekiler

- Giriş 127
- Çember 127
- Elips 132
- Parabol 140
- Hiperbol 148
- Özet 154
- Değerlendirme Soruları 154

Çalışma Önerileri

Bu üniteyi çalışmadan önce;

- konik kesitleri hakkındaki lise notlarınıza göz gezdiriniz.
- düzlemin eşmetrel dönüşümlerini (dönme ve öteleme ünitelerini) tekrar ediniz.

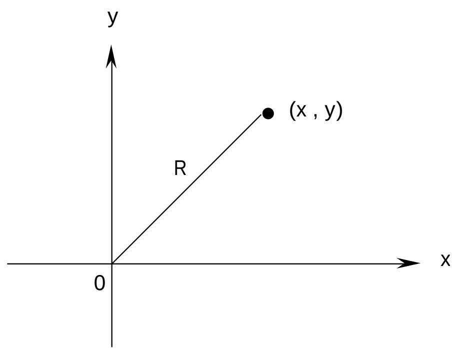
1. Giriş

Konikler (ya da koni kesitleri) en önemli geometrik nesnelerdendir. Analitik geometrinin ortaya çıkışıyla özellikle koni kesitlerinin incelenmesi çok kolaylaşmıştır. Bu inceleyeceğimiz nesnelere neden koni kesitleri denildiğini daha sonraki bölümlere bırakarak, bu nesneleri yalnız geometrik yer tanımlarını kullanarak inceleyelim. Bir koni kesiti denildiğinde şu nesneler anlaşılır: Çember, elips, parabol ve hiperbol. Hatta bir sonraki bölümde göreceğimiz gibi çember de özel bir elips olarak algılanırsa temel olarak üç çeşit koni kesitinden bahsedebiliriz. Her ne kadar özel bir elips olsa da biz çember ile koni kesitlerini incelemeye başlayalım.

2. Çember

Düzlemde verilen bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yerine bir **çember** denir. Bu verilen noktaya **çemberin merkezi** ve alınan eşit uzaklığa da **çemberin yarıçapı** denir.

Bu tanımdan sonra çemberi verilen bir koordinat sisteminde analitik olarak ifade edelim. Ötelenmiş ve dönmüş koordinat sistemlerini de göz önüne alacağımızdan, merkezi (0, 0) başlangıç noktası almamızda bir sakınca yoktur.



Eğer bir $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ noktası $(0, 0)$ merkezli R yarıçaplı çembere ait bir nokta ise tanıma göre bunun başlangıç noktasına olan uzaklığı R sayısına eşit olacaktır. O halde

$$d\big((0, 0)\,,\,(x, y)\big) = \sqrt{x^2 + y^2} = R$$

yani çember üzerinde bulunan (x, y) noktası $x^2 + y^2 = R^2$

koşulunu sağlamalıdır.

Tersine $(0, 0)$ başlangıç noktasına uzaklığı R olan bütün noktalar tanımdan dolayı çember üzerindedir. O halde bir çember, merkezi ve yarıçapı ile tek türlü belirgin olarak ifade edilebilir.

İlk olarak düzlemin bir dönmesi altında çember denkleminin değişmediğini görelim. Düzleme bir R_θ dönmesi verildiğinde koordinat değişimi

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y &= x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{aligned}\right\} \text{ idi.}$$

Şimdi bu değerleri $x^2 + y^2 = R^2$ denkleminde yerine koyarsak

$$(x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 + (x' \sin\theta + y' \cos\theta)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow x'^2 \cos^2\theta - 2x'y' \sin\theta\cos\theta + y'^2 \sin^2\theta + x'^2 \sin^2\theta + 2x'y' \sin\theta\cos\theta + y'^2 \cos^2\theta = R^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x'^2 + y'^2 = R^2$$

elde edilir. Görüldüğü gibi çemberin denklemi R_θ dönmesinden hiç etkilenmedi. Bunun nedeni çemberin başlangıç noktasından geçen her doğruya göre simetrik olmasındandır.

Şimdi düzlemin $T_{(a,\, b)}$ ötelemesi altında çember denkleminin nasıl değiştiğini görelim. Bildiğimiz gibi $T_{(a,\, b)}$ dönüşümü

$$T_{(a,\, b)}(x, y) = (x\text{-}a , y\text{-}b) \quad \text{yani} \quad x = x' + a \ , \ y = y' + b$$

olarak tanımlanmıştı. Bu koordinat değişimi $x^2 + y^2 = R^2$ çember denkleminde yerine konulursa:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad x'^2 + y'^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

şeklini alır.

Bu son elde edilen denklemi sıfırdan farklı bir A sayısı ile çarparsak

$$A\, x^2 + A\, y^2 + 2aA\, x + 2bA\, y + A\, (a^2 + b^2 - R^2) = 0 \tag{7.1}$$

$(a, b) \in R^2$ merkezli R yarıçaplı en genel çember denklemini elde etmiş oluruz. O halde çember denkleminde

- $x \,.\, y$ teriminin katsayısı sıfır,
- x^2 ve y^2 terimlerinin katsayıları eşittir.

Bu durumda doğal olarak bu koşulları sağlayan her denklem bir çemberi midir sorusu sorulabilir.

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

denklemini göz önüne alalım. Bütün katsayıları A ile bölerek

$$x^2 + y^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0$$

denklemini elde ederiz. Eğer bu denklem (a, b) merkezli R yarıçaplı bir çemberin denklemi ise bunu (7.1) denklemi ile karşılaştırarak

$$-2a = \frac{B}{A} \;,\; -2b = \frac{C}{A} \;\Rightarrow\; a = \frac{-B}{2A} \;,\; b = \frac{-C}{2A}$$

merkez koordinatları $\left(\frac{-B}{2A}, \frac{-C}{2A}\right)$ olarak elde edilir. Şimdi yarıçapı belirleyelim. Yarıçaptaki en önemli kısıt, yarıçapın pozitif bir gerçel sayı olmasıdır. Yine son denklemimizi (7.1) denklemi ile karşılaştırarak

$$\frac{D}{A} = \left(\frac{-B}{2A}\right)^2 + \left(\frac{-C}{2A}\right)^2 - R^2 \quad \text{elde edilir.}$$

Buradan

$$R^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2} \quad \text{olur}$$

$4A^2 > 0$ ve $R^2 > 0$ olduğundan $B^2 + C^2 - 4AD > 0$ olmalıdır. Bu durumda yarıçap

$$R = \sqrt{\frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}} = \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 + C^2 - 4AD} \quad \text{dır.}$$

Birkaç örnekle bu anlattıklarımızı pekiştirelim.

Örnek

(-1, 2) merkezli 3 yarıçaplı çemberin denklemini yazınız.

Çözüm

Bu çemberin denklemi

$$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

olarak elde edilir.

Örnek

$2x^2 + 2y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$ denklemiyle verilen eğrinin bir çember olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm

Denklemde bütün katsayılar 2 ile oranlanarak

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - y + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{olur}$$

(Eğer formülleri anımsayamazsanız kareye tamamlama yöntemini izleyebilirsiniz).

$$x^2 + \frac{3}{2}x = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$$y^2 - y = y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Bu ifadeleri denklemde yerlerine koyarsak:

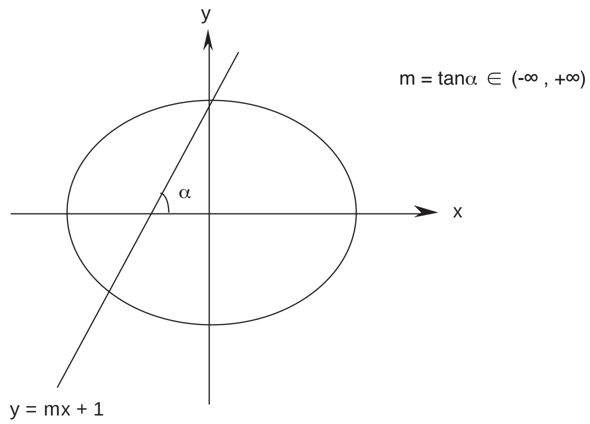
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{-9 - 1 + 4}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

elde edilir. O halde denklem $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ merkezli ve $\sqrt{\frac{3}{2}}$ yarıçaplı bir çember gösterir.

Çemberin çok önemli bir başka analitik ifadesini de aşağıdaki şekilde elde edebiliriz. Bu parametrik form yardımıyla geometrinin bir cebir probleminin çözümünde nasıl çok güzel bir şekilde kullanıldığını görelim.



$y = mx + 1$ doğrusu $x^2 + y^2 = 1$ birim çemberini iki noktada keser. Bu noktalardan bir tanesi (0, 1) dir. Diğerini ise hesaplayalım.

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + 1 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 + (mx + 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + m^2x^2 + 2mx + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (m^2 + 1)\,x^2 + 2mx = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ya da} \quad x = -\frac{2m}{m^2 + 1}$$

elde edilir. $x = -\dfrac{2m}{m^2 + 1}$ e karşılık gelen y değeri

$$y = mx + 1 \Rightarrow y = m\left(-\frac{2m}{m^2 + 1}\right) + 1$$

$$y = \frac{-2m^2 + m^2 + 1}{m^2 + 1} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

elde edilir.

Bu durumda çember ile doğrunun kesiştiği diğer nokta $\left(\dfrac{-2m}{m^2 + 1}, \dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}\right)$ dir. Yani çember üzerindeki keyfi bir (x, y) noktasının koordinatları

$$x = -\frac{2m}{1 + m^2} \quad , \quad y = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

şeklindedir. Bu parametrizasyonun bir sonucu olarak $x^2 + y^2 = z^2$ şeklindeki Pisagor üçlülerini belirleyebiliriz. Yani x, y, z tamsayılar olmak üzere

$$x^2 + y^2 = z^2$$

denklemini çözebiliriz. Yukarıdaki birim çemberin parametrizasyonunda m doğrunun eğimini bir rasyonel sayı alırsak $m = \frac{k}{l}$, $k, l \in \mathbf{Z}$ (tam sayılar kümesi) ve $l \neq 0$, bu durumda

$$x = -\frac{2\frac{k}{l}}{1+\frac{k^2}{l^2}} = -\frac{2k}{\cancel{l}} \cdot \frac{l^{\cancel{2}}}{k^2+l^2} = -\frac{2kl}{k^2+l^2}$$

$$y = \frac{1-\frac{k^2}{l^2}}{1+\frac{k^2}{l^2}} = \frac{l^2-k^2}{l^2} \cdot \frac{l^2}{k^2+l^2} = \frac{l^2-k^2}{l^2+k^2} \quad \text{olurlar.}$$

Bu (x, y) sıralı ikilisi birim çembere ait bir nokta olduğundan birim çemberin denklemi olan $x^2 + y^2 - 1 = 0$ denklemini sağlar. Denklemde x ve y yi yerine koyarsak:

$$\left(-\frac{2kl}{k^2+l^2}\right)^2 + \left(\frac{l^2-k^2}{l^2+k^2}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2kl)^2 + (l^2-k^2)^2 = (l^2+k^2)^2 \quad \text{olur}$$

Yani $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini bazı çözümlerinin k, l tamsayılar olmak üzere

$$x = 2kl \ , \ y = l^2 - k^2 \ , \ z = l^2 + k^2$$

olur. Yine birim çemberi inceleyerek bütün çözümlerin bunlardan ibaret olduğunu da siz gösteriniz. Örneğin $k = 107$ ve $l = 53$ için

$$x = 2kl = 2 \,.\, 107 \,.\, 53 = 11342$$
$$y = l^2 - k^2 = 53^2 - 107^2 = -8640$$
$$z = l^2 + k^2 = 53^2 + 107^2 = 14258$$

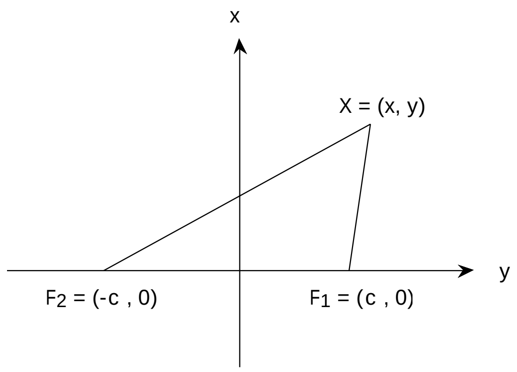
olur. Yalnızca çok pratik bir Pisagor sayıları üreteci elde edilmekle kalınmayıp, bütün Pisagor sayılarını veren bir yöntem geliştirilmiş oldu.

3. Elips

Elips çemberin biraz deforme olmuş formu olan bir geometrik nesnedir. Tanımı şu şekilde yapılabilir.

Düzlemde verilen $F_1 = (a_1, b_1)$ ve $F_2 = (a_2, b_2)$ noktalarına uzaklıkları toplamı verilen sabit bir a sayısına eşit olan noktaların geometrik yerine bir **elips** denir. Bu verilen (a_1, b_1) ve (a_2, b_2) noktalarına **elipsin odakları** denir.

Başlangıç olarak odakları $c > 0$ olmak üzere $F_1 = (c, 0)$ ve $F_2 = (-c, 0)$ noktalarında olan ve odaklara uzaklıkları toplamı 2a ya eşit olan noktaların geometrik yerinin analitik ifadesini elde edelim:



$(x, y) \in \mathbf{R^2}$ noktası adı geçen elipse ait bir nokta olsun. Bu durumda tanım gereğince

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4xc$$

$$\Leftrightarrow a^2 + xc = a\sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2c^2 - x^2a^2 - y^2a^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(c^2 - a^2\right) - y^2a^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$

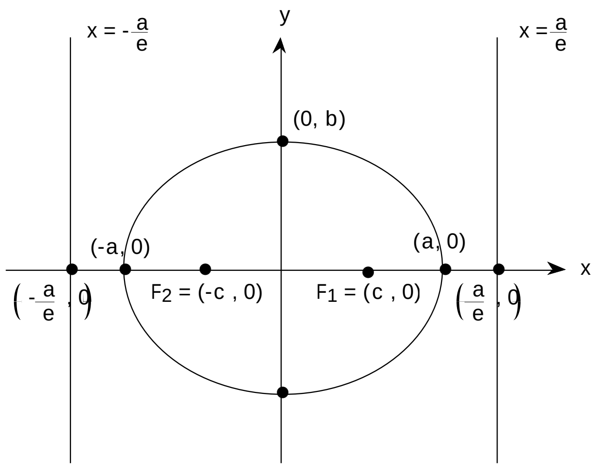
$F_1 X F_2$ üçgeninde iki kenar toplamı üçüncü kenardan büyük olduğundan $2a > 2c \Leftrightarrow a > c$ dir.

Bu durumda $a - c > 0$. Eğer $b^2 = a^2 - c^2$ denilirse

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elde edilir. Açıkça görüldüğü gibi eğer (x, y) noktası elips üzerinde ise $(-x, y)$ noktasıda elips üzerindedir. O halde elips y eksenine göre simetriktir. Diğer yandan (x, y) elipse çift ise $(x, -y)$ ve $(-x, -y)$ noktaları da elipse ait olduğundan elips hem x eksenine hem de başlangıç noktasına göre simetriktir. Denklemden görüleceği gibi elips x eksenini $(a, 0)$ ve $(-a, 0)$ noktalarında y - eksenini de $(0, b)$ ve $(0, -b)$ noktalarında keser ve $b < a$ olduğundan x eksenine elipsin **büyük ekseni** ve y - eksenine de elipsin **küçük ekseni** denir. Elipsin eksenleri kestiği $(a, 0)$ $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ noktalarına da elipsin köşeleri denir. Son olarak $e = \frac{c}{a} \in (0, 1)$ sayısına da elipsin **dış merkezliği** denir. Eğer $e = 0$ ise $c = 0$ olur ve özel bir elips olan çember elde edilir.

Yukarıda elde ettiğimiz elips ile devam edecek olursak, denklemleri $x = \frac{a}{e}$ ve $x = -\frac{a}{e}$ denklemleri ile verilen özel iki doğru vardır. $0 < e < 1$ olduğundan $\frac{a}{e} > a$ ve $-\frac{a}{e} < -a$ dır. Dolayısıyla Şekil 7.1 de görüldüğü gibi elipsin her iki yanında yer alırlar.



Şekil 7.1: Odakları $F_1 = (c , 0)$ ve $F_2 = (-c , 0)$ Noktaları Olan Merkezil Elips

Bu doğrulara **elipsin doğrultmanları** denir. Bu doğrultmanların elips için özel iki doğru olduklarını görmek için $F_1 = (c, 0)$ odağını, $x = \frac{a}{e}$ doğrultmanını ve elips üzerinde bir $X = (x, y)$ noktası alalım. Bu X noktasını F_1 odağına olan uzaklığı:

$$d(x, F_1) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2} \qquad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ olduğundan} \right)$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) x^2 - 2xc + c^2 + b^2} \qquad \left(1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = e^2 \text{ olduğundan} \right)$$

$= \sqrt{e^2 x^2 - 2x\,ea + a^2}$

$= a - ex$ olur. $(a - ex > 0$ olduğundan$)$

Diğer yandan $X = (x, y)$ noktasının $x = \frac{a}{e}$ doğrusuna olan uzaklığı ise $\frac{a}{e} - x = \frac{1}{e}(a - ex)$ dir.

O halde

$$\frac{(x, y) \text{ noktasının } (c, 0) \text{ odağına uzaklığı}}{(x, y) \text{ noktasının } x = \frac{a}{e} \text{ doğrultmanına uzaklığı uzaklığı}} = e \qquad (7.2)$$

ve benzer yöntemle aşağıda verilen eşitlik de elde edilebilir.

$$\frac{(x , y) \text{ noktasının } (-c , 0) \text{ odağına uzaklığı}}{(x , y) \text{ noktasının } x = -\frac{a}{e} \text{ doğrultmanına uzaklığı}} = e \qquad (7.3)$$

Aslında bu elde edilen son iki denklemin her biri elipsin tanımı olarak alınabilir. Bunu şu şekilde görebiliriz. Bir $(x , y) \in \mathbf{R}^2$ noktası (7.2) denklemini sağlasın yani:

$$\frac{\sqrt{(x - c)^2 + y^2}}{\left| x - \frac{a}{e} \right|} = e \text{ olsun. Bu durumda}$$

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$$

$$x^2\left(1 - e^2\right) + y^2 = a^2 - c^2 \quad (c = a \,.\, e \text{ olduğundan } 2xc = 2aex \text{ dir})$$

$$a^2 > c^2 \text{ olduğundan } b^2 = a^2 - c^2 ,\ e^2 = \frac{c^2}{a^2} \text{ yazarsak}$$

$$b^2x^2 + y^2a^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elde edilir.

Bu durumda elipsin tanımı olarak düzlemde (7.1) ya da (7.2) özelliğini sağlayan noktaların kümesi olarak alınabilir.

Son olarak her iki simetri ekseninin ara kesiti olan noktaya çemberden esinlenerek **elipsin merkezi** denilebilir. Bizim yukarıda kuruluşunu verdiğimiz elipsin merkezi $(0 , 0)$ başlangıç noktasıdır.

Şimdi elipsin denkleminin düzlemin dönme ve ötelemesi altında nasıl değiştiğini görelim. Öncelikle

$$T_{(\alpha,\, \beta)}(x, y) = (x - \alpha, y - \beta)$$

ötelemesi altında elipsin denkleminin değişimini inceleyelim.

$x = x' - \alpha$, $y = y' - \beta$ koordinat değişimi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemine uygulanır sa:

$$\frac{(x' - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y' - \beta)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{2\alpha}{a^2}x' - \frac{2\beta}{b^2}y' + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}x'^2 + \frac{1}{b^2}y'^2 - \frac{2\alpha}{a^2}x' - \frac{2\beta}{b^2}y' + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (7.4)$$

elde edilir.

Şimdi bu durumun tersine bakalım. Yani

$Ax^2 + By^2 + 2Cx + Dy + E = 0$ denklemiyle verilen eğrinin ne zaman (7.4) tipinde bir elips denklemi olacağını inceleyelim.

(7.4) denkleminde x'^2 ve y'^2 nin katsayıları $\frac{1}{a^2}$ ve $\frac{1}{b^2}$ aynı işarete sahiptirler, o halde ya $A>0$ ve $B>0$ ya da $A<0$ ve $B<0$ olmalıdır. $A>0$ ve $B>0$ olarak alırsak kareye tamamlama ile

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

$$\Rightarrow A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 - \frac{C^2}{4A} - \frac{D^2}{4B} + E = 0$$

$$\Rightarrow A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E \qquad \text{olur.}$$

Bu durumda $\frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E > 0$ olmalıdır. Eğer $A > B$ ise kolayca görülebilir ki bu denklem merkezi $\left(-\frac{C}{2A}, -\frac{C}{2B}\right)$ noktasında ve eksen uzunlukları

$$a = \sqrt{\frac{C^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4AB} - \frac{E}{A}} \qquad \text{ve} \qquad b = \sqrt{\frac{C^2}{4AB} + \frac{D^2}{4B^2} - \frac{E}{B}}$$

olan bir elipstir.

$A < B$ durumunu da benzer şekilde siz inceleyiniz.

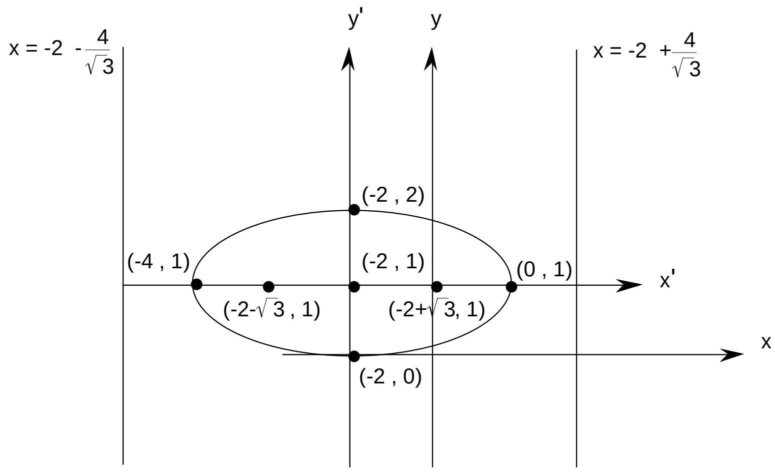
Örnek

$4y^2 + x^2 - 8y + 4x + 4 = 0$ denklemi ile verilen eğrinin bir elipsin olduğunu gösteriniz. Bu elipsin merkezini, odaklarını ve doğrultmanlarını belirleyiniz.

Çözüm

$$4y^2 + x^2 - 8y + 4x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \; 4(y^2 - 2y) + x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \; 4(y^2 - 2y + 1 - 1) + (x+2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \; (x+2)^2 + 4(y+1)^2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \; \frac{(x+2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \quad \text{elde edilir.}$$

O halde merkez $(-2, 1)$ noktası ve $a^2 = 4$, $b^2 = 1$ olduğundan $c^2 = a^2 - b^2 = 3$ olur. Bu durumda $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve doğrultmanları $x + 2 = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$



olur.

Düzlemin R_θ dönmesi altında elipsin denkleminin hangi formu aldığını da görebiliriz.

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

koordinat değişimi altında, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemi

$$\frac{(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2}{a^2} + \frac{(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2}{a^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x'^2 + \left(\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2}\right)y'^2 + \left(-\frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x'y' = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta\right)x'^2 + \left(b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta\right)y'^2 + \sin^2\theta\left(a^2 - b^2\right)x'y' = a^2 b^2$$

ifadesi elde edilir. Görüldüğü gibi bu ifadede x'^2 nin ve y'^2 nin katsayılarının her ikiside aynı işarettedir.

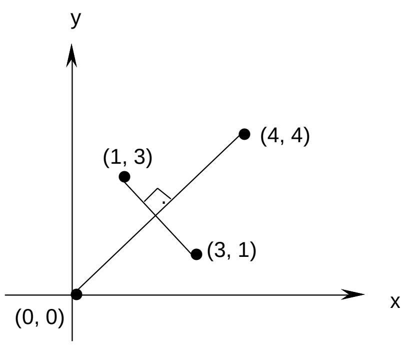
Son olarak düzlemin bu ötelemesi ve dönmesi altında doğrultman ve odaklarına da aynı hareket uygulanır. Şimdi örnekleri inceleyelim.

Örnek

Köşeleri $(0,0)$, $(4,4)$, $(1,3)$, $(3,1)$ noktaları olan elipsin denklemini yazınız, doğrultmanlarını ve dış merkezliğini hesaplayınız.

Çözüm

Düzlemde bu noktaları işaretlersek



Şekilden görüldüğü gibi elipsin büyük ekseni (0, 0) noktasını (4, 4) noktasına birleştiren doğru üzerindedir. Bu noktalar arasındaki uzaklık $2a$ idi. O halde

$$2a = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \quad \text{olur}$$

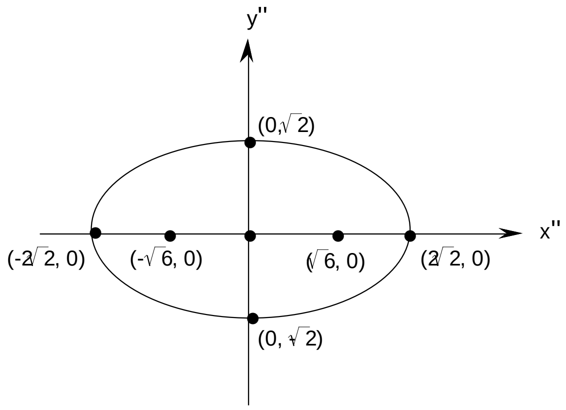
Benzer şekilde küçük eksen uzunluğu

$$2b = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} \quad \text{olur}$$

Öte yandan $c^2 = a^2 - b^2$ olduğu anımsanırsa:

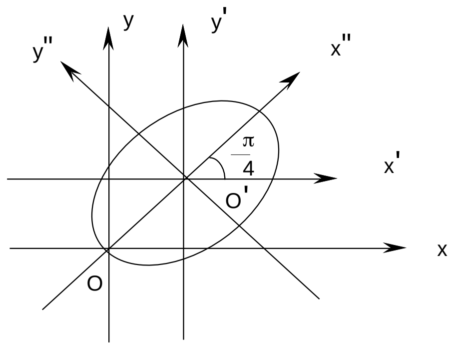
$$c = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6} \quad \text{olur}$$

O halde bu koşulları sağlayan merkezil elips



denklemi $\frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{2} = 1$ dir. Bu elipsin dış merkezliği $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve doğrultmanları $x'' = \frac{a}{e} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ve $x'' = -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ doğrularıdır. Şimdi düzlem $\frac{\pi}{4}$ kadar dönme verip ve (2, 2) ötelemesi yaparsak elde edilen merkezil elipsin görüntüsü istenen elipstir.

Aşağıdaki şekilde belirtildiği gibi



Önce $x''O'y''$ koordinat sisteminde denklemi

$\frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{2} = 1$ olan elipsi $x'Oy'$ koordinat sistemindeki denklemini yazalım:

$$x'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + y'\right),\ y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x' + y'\right) \quad \left(\theta = \frac{\pi}{4} \text{ olduğunda}\right)$$

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + y'\right)\right)^2}{8} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x' + y'\right)\right)^2}{2} = 1$$

$$\frac{x'^2 + y'^2 + 2x'y'}{16} + \frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{4} = 1$$

$$5x'^2 + 5y'^2 - 6x'y' = 16$$ elde edilir.

O' noktasının xOy sistemindeki koordinatları (2,2) olduğundan

$x' = x - 2\,,\ y' = y - 2$ kullanılarak

$$5(x-2)^2 + 5(y-2)^2 - 6(x-2)(y-2) = 16$$
$$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 20x - 20y = 0$$

denklemi elde edilir.

Doğrulmanları içinde aynı işlem yapılırsa

$$x'' = 4\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ve} \quad x'' = -4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + y'\right) = 4\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + y'\right) = -4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

olur. Nihayet xOy sisteminde

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - 2 + y - 2\right) = 4\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - 2 + y - 2\right) = -4\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y - 4 - \frac{8}{\sqrt{3}} = 0 \quad \text{ve} \quad x + y - 4 + \frac{8}{\sqrt{3}} = 0$$

doğrultman doğruları elde edilir.

4. Parabol

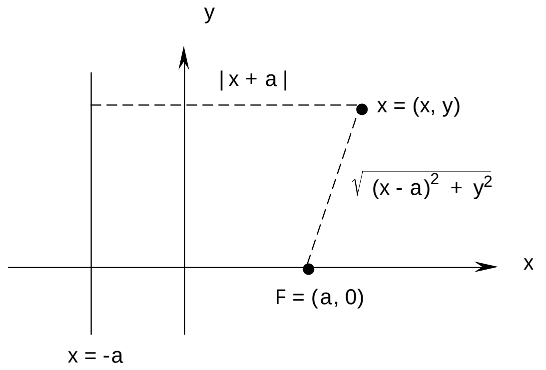
Çember ve elipsten sonra diğer bir önemli konik paraboldür. Parabol de diğer konikler gibi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Düzlemde bir $F = (a, b)$ noktasına ve bir l doğrusuna aynı uzaklıkta olan noktaların geometrik yerine bir **parabol** denir. Eğer X parabole ait bir nokta ise

$$d(X, l) = d(X, F) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(X, l)}{d(X, F)} = 1$$

olur. Burada adı geçen l doğrusuna parabolün **doğrultmanı** ve $F = (a, b)$ noktasına parabolün **odağı** denir.

Şimdi ilk olarak $a > 0$ olmak üzere odağı $F = (a, 0)$ noktası ve doğrultmanı $x = -a$ doğrusu olan parabolün analitik ifadesini elde edelim.



$$\left.\begin{aligned} d\big((x, y), l\big) &= |x + a| \\ d\big((x, y), F\big) &= \sqrt{(x - a)^2 + y^2} \end{aligned}\right\}$$ değerlerini tanıma göre eşitleyerek parabolün

analitik ifadesini elde edebiliriz.

$$|x + a| = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$$

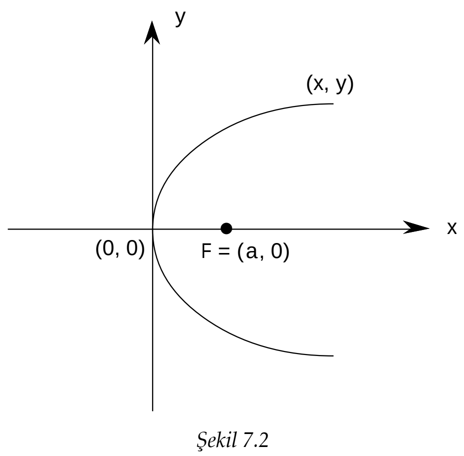
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4ax = y^2$$

O halde odağı $F = (a, 0)$ ve doğrultmanı $x = -a$ doğrusu olan parabolün denklemi

$$y^2 = 4ax$$

elde edilir. Düzlemin ötelemesi ve dönmesi altında diklik ve uzaklıklar korunacağından x ekseninin görüntüsü doğrultmanın görüntüsüne dik kalmaya devam eder. Bu nedenle doğrultmana dik olan doğruya (bizim denklemini elde ettiğimiz parabol için x eksenine) **parabolün asal ekseni** denir. Parabol asal eksenini bir noktada keser (bizim denklemini elde ettiğimiz parabolde (0, 0) noktası) bu noktaya **parabolün köşesi** denir. Açık olarak göründüğü gibi parabol asal ekseni olan x eksenine göre simetriktir. Yani (x, y) parabole ait bir nokta ise bunun x eksenine göre simetriği olan (x, -y) noktası da parabole aittir. Bu bilgilerle parabolün şekli kabaca

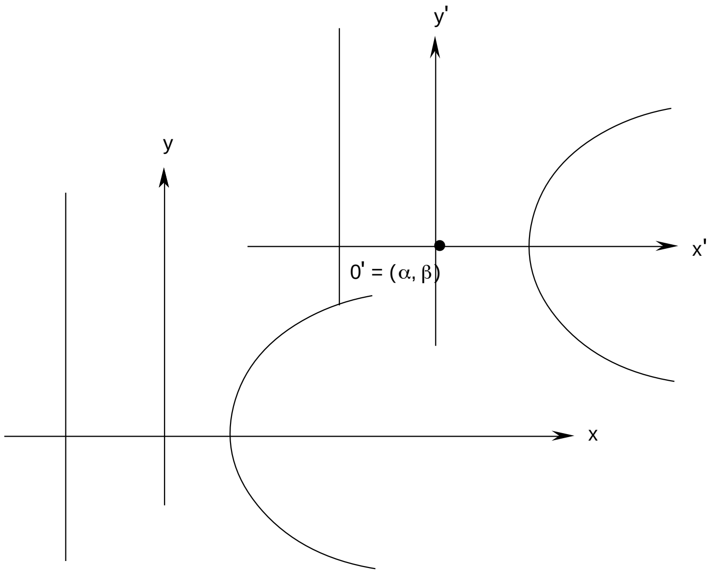


Şekil 7.2

olarak çizilir. Şimdi bu elde ettiğimiz parabole öteleme ve dönme dönüşümlerini uygulayarak keyfi doğrultman ve keyfi odağa sahip olan parabol denklemlerini elde edip bunların özelliklerini belirleyelim. İlk olarak düzlemin $T_{(\alpha,\beta)}$ öteleme dönüşümü altında incelemeye başlayalım.

$$T_{(\alpha,\beta)} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 , \quad T_{(\alpha,\beta)}(x, y) = (x + \alpha , y + \beta)$$

öteleme dönüşümü verilsin.



$x'O'y'$ koordinat sisteminde odağı $F' = (a, 0)$ noktası ve doğrultmanı $x = -a$ doğrusu parabölün denklemi

$$x'^2 = 4ay'$$

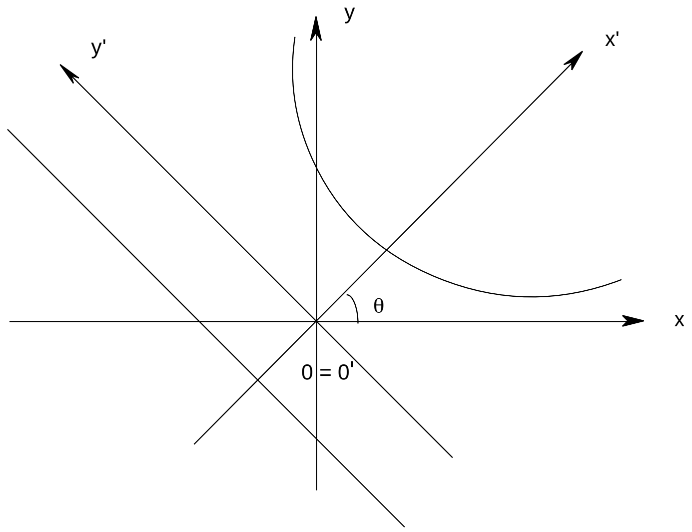
dür. Şimdi buradan orjinal koordinat sistemine geçersek $x' = x - a$, $y' = y - \beta$ değişken değişimiyle

$$(x - \alpha)^2 = 4a (y - \beta)$$
$$\Leftrightarrow \; x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = 4ay - 4a\beta$$
$$\Leftrightarrow \; x^2 - 2\alpha x + 4ay + \alpha^2 + 4a\beta = 0$$

elde edilir. Görüldüğü ötelenmiş bir parabol denklemi y^2 terimi içermez.

Şimdi benzer olarak düzlemin R_θ dönmesi altında parabol denkleminin ne hal aldığını görelim. Düzlemin

$$R_\theta (x, y) = (x \cos\theta + y\sin\theta \; , \; -x \sin\theta + y \cos\theta)$$



x'O'y' koordinat sisteminde odağı bu koordinat sisteminde (a, 0) ve doğrultmanı yine x'O'y' koordinat sisteminde x = - a doğrusu alan parabolün denklemi

$$x'^2 = 2ay'$$

dür. Bu parabölün xOy orjinal koordinat sistemindeki denklemi

$$x' = x \cos\theta + y \cos\theta$$
$$y' = x \cos\theta + y \cos\theta$$

koordinat dönüşümü kullanılarak

$$(x \cos\theta + y \sin\theta)^2 = 4a (-x \sin\theta + y \cos\theta)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 \cos^2\theta + 2xy \sin\theta \cos\theta + y^2 \sin^2\theta = -4ax \sin\theta + 4ay \cos\theta$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 \cos^2\theta + y^2 \sin^2\theta + xy \sin^2\theta + 4ax \sin\theta - 4ay \cos\theta = 0$$

şeklini alır.

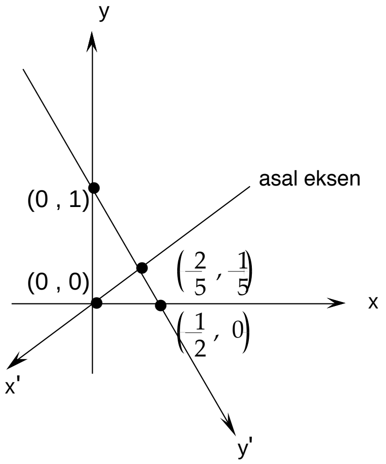
Bu durumda keyfi bir parabolün denklemi dönme öteleme ile kolayca yazılabilir.

Örnek

Doğrultmanı $2x + y - 1 = 0$ doğrusu ve odağı $F = (0, 0)$ noktası olan parabolün denklemini yazınız.

Çözüm

Öncelikle doğrultman ve odağı düzlemde geometrik olarak gösterelim.



Asal eksen, odaktan geçip doğrultmana dik olacağı için eğimi $m = 1/2$ ve denklemi $y = \frac{1}{2}x$ dir. Doğrultman ile asal eksenin kesim noktası

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x \\ 2x + y - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminin çözümünden

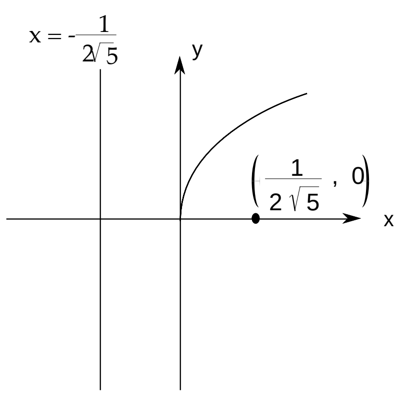
$(x\,,\ y) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ bulunur. O halde doğrultmanın odağa olan uzaklığı

$$2a = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{olur}$$

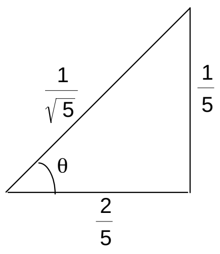
Yani $a = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ elde edilir. Devamla parabolün köşesini $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right)$ noktası olarak hesaplayabiliriz. Bu bilgilerle önce $a = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ ve odağı $\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\,,\ 0\right)$ doğrultmanı $x = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$ olan parabolün denklemi

$$x^2 = 4\frac{1}{2\sqrt{5}}\,y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\,y$$

olur.



Şimdi bir R_θ dönmesi uygulayarak parabolün asal eksenini $y = 2x$ doğrusu yapalım. Yalnız bu dönmeyi uygularken yönede dikkat ederek dönme açısını hesaplayalım.



dik üçgeninde $\sin\theta = \frac{1/5}{1/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ve $\cos\theta = \frac{2/5}{1/\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ olur. Yön nedeniyle dönme açısı θ yerine $\theta + \pi$ olmalıdır.

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ dir.}$$

Bu durumda $x^2 = \frac{2}{\sqrt{5}} y$ parabolüne

$$R_{(\pi+\theta)}(x, y) = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} x - \frac{\sqrt{5}}{5} y, \frac{\sqrt{5}}{5} x - \frac{2\sqrt{5}}{5} y\right)$$

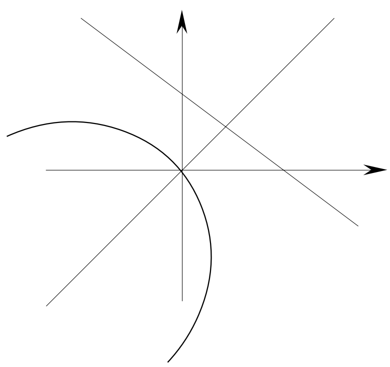
dönmesi uygulanarak:

$$\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} x - \frac{\sqrt{5}}{5} y\right)^2 = \frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{5} x - \frac{2\sqrt{5}}{5} y\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{5}}{\cancel{25}}(2x + y)^2 = \frac{2\sqrt{5}}{\cancel{25}}(x - 2y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}(2x + y)^2 = (x - 2y)$$

olur. Bu parabolün grafiği



Bu parabolün doğrultmanı ise $x = -\frac{2}{2\sqrt{5}}$ doğrusunun görüntüsü olacaktır. Bu görüntü ise

$$-\frac{2\sqrt{5}}{5}x-\frac{\sqrt{5}}{5}y=-\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\cancel{\sqrt{5}}}{5}x+\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{5}y=\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{2\,.\,5}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+y=\frac{1}{2}$$

olur. Şimdi son olarak başlangıç noktası parabolün köşesi $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)$ noktasına öteyelim.

$x \longrightarrow x-\frac{1}{5}$, $y \longrightarrow y-\frac{1}{10}$ koordinat değişimi uygulanırsa parabolün denklemi

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\left(2\left(x-\frac{1}{5}\right)+y-\frac{1}{10}\right)^2=\left(x-\frac{1}{5}-2\left(y-\frac{1}{10}\right)\right)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\left(2x+y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-2y\right)$$

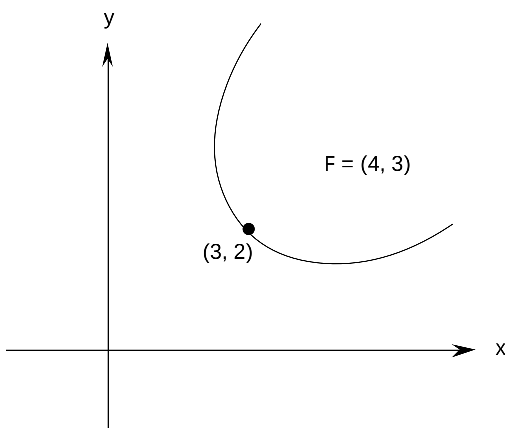
olur. Doğrultmanın denklemi ise aynı koordinat dönüşümüyle

$$2\left(x-\frac{1}{5}\right)+y-\frac{1}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+y-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+y-1=0$$ elde edili

Bir başka örnek olarak



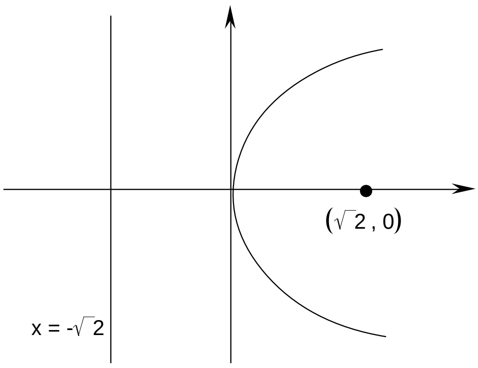
Şekilde görüldüğü gibi köşesi $(3,2)$ noktası ve odağı $F=(4,3)$ noktası olan parabolün denklemini yazalım.

Çözüm

Parabolün ekseni (3, 2) ve (4, 3) noktaları tarafından belirlenen doğrudur. Bu doğrunun denklemi $x - y - 1 = 0$ dır. Diğer yandan parabolün parametresi

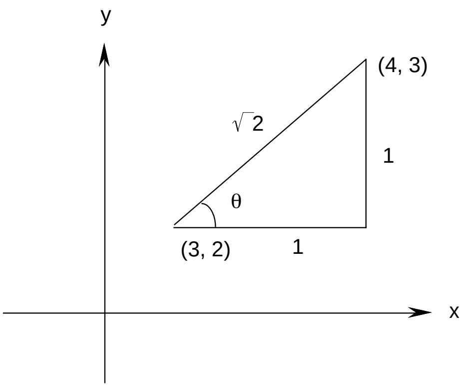
$$2a = 2d\big((3\,,\,2)\,,(4\,,\,3)\big) = 2\sqrt{(3-4)^2 + (2-3)^2} = 2\sqrt{2} \text{ dir.}$$

Bu durumda doğrultmanı $x = -\sqrt{2}$ doğrusu odağı $(\sqrt{2}, 0)$ noktası olan parabolün denklemi $x^2 = 4\sqrt{2}\,y$ olup grafiği 7.3'deki gibi çizilir.



Şekil 7.3

Bu parabole dönme ve öteleme uygulanarak sorudaki parabol elde edilir. Önce dönme açısını odak ve köşe yardımıyla hesaplanabilir.



Şekilden $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ hesaplanır. Hatta $\sin\theta = \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dir.

O halde $R_{\frac{\pi}{4}}$ dönmes

$$R_{\frac{\pi}{4}}(x\,,\,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,y\,,\, -\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,y\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y\,,\,-x + y)$$

koordinat değişimi $x^2 = 4\sqrt{2}\,y$ denklemine uygulanırsa

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(x + y)^2 = 4(-x + y)$$

olur. Son olarak düzlem (3, 2) köşesine ötelenirse

$$T_{(3,\,2)}(x, y) = (x - 3, y - 2)$$

koordinat değişimi ile

$$\frac{1}{2}(x - 3 + y - 2)^2 = 4(-x + 3 + y - 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + y - 5)^2 = 8(y - x + 1)$$

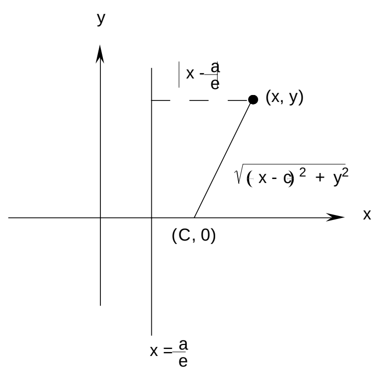
elde edilir.

5. Hiberbol

Önceki kısımlarda dış merkezliğin $e = 0$, $0 < e < 1$ ve $e = 1$ olması durumlarını inceledik. Bu durumlarda elde edilen koni kesitleri sırasıyla çember, elips ve parabol idi. Şimdi kalan tek durum olan $e > 1$ durumunu inceleyeceğiz.

$e > 1$ ve $c > 0$ olmak üzere, elipsteki kuruluşa paralel olarak, $(c, 0)$ noktasını bir odak ve $x = \frac{c}{e^2} = \frac{c/e}{e} = \frac{a}{e}$ $\left(a = \frac{c}{e} \text{ olarak tanımlandı}\right)$ bir doğrultman doğrusu olsunlar. $e > 1$ olduğundan $\frac{a}{e} < a < c$ dir. Bu girişten sonra hiperbolü tanımlayalım.

Düzlemde odağa uzaklığının doğrultmana uzaklığına oranı "e" olan noktaların geometrik yerine bir **hiperbol** denir.



Şekil 7.4

Şekil 7.4 de de belirtilen uzunlukları kullanarak tanım gereğince

$\dfrac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{a}{e}\right|} = e$ yazılabilir. Bu eşitliği basitleştirirsek:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = e\left|x-\frac{a}{e}\right| = |ex-a|$$

$$\Leftrightarrow\ (x-c)^2 + y^2 = (ex-a)^2$$
$$\Leftrightarrow\ x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e2x^2 - 2aex + a^2$$
$$\Leftrightarrow\ x^2(1-e^2) + y^2 = a^2 - c^2 \quad (ae = c \text{ olduğundan})$$

$c > a$ olduğundan $b^2 = c^2 - a^2$ olarak tanımlanırsa

$$b^2 = a^2\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) = a^2(e^2-1) \Leftrightarrow 1 - e^2 = -\frac{b^2}{a^2} \quad \text{olur}$$

Bu tanımlamalar kullanılarak:

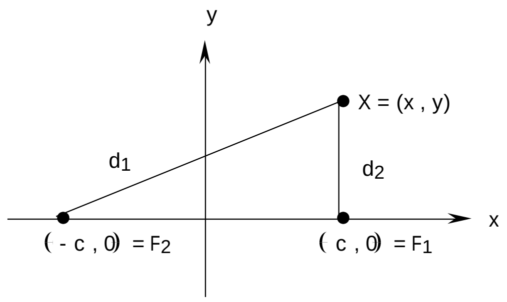
$$x^2\left(-\frac{b^2}{a^2}\right) + y^2 = -b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7.5)$$

olur.

Benzer şekilde $(-c, 0)$ noktasını odak ve $x = -\dfrac{a}{e}$ doğrusunu doğrultman olarak alsaydık yine aynı hiperbolü elde edecektik. (Bunu hesaplayarak görmeye çalışınız.)

(7.5) denklemine yakından bakılırsa elips gibi hiperbol de x-eksenine, y eksenine ve başlangıç noktasına göre simetriktir. Yine elipsteki gibi başlangıç noktasına **hiperbolün merkezi** denir. Yine (7.5) denkleminden x-eksenini $(a, 0)$ ve $(-a, 0)$ noktalarından keser. Bu iki noktaya **hiperbolün köşeleri** denir. Diğer yandan hiper bol y-eksenini kesmez. Çünkü (7.5) denklemin de $x = 0$ alınırsa $-\dfrac{y^2}{b^2} = 1$ olur ki bu imkansızdır.

Hiperbolün tanımı da elips için verdiğimiz orjinal tanıma benzer olarak da yapabiliriz. Eğer $(c, 0)$ ve $(-c, 0)$ noktalarını odaklar olarak alırsak. Bu durumda düzlemde bu iki noktaya uzaklıkları farkının mutlak değeri sabit olan (bu sabiti 2a alalım) noktalarını geometrik yerine bir hiperbol denir.



XF_1F_2 üçgeninde iki kenar farkı $d_1 - d_2$ üçüncü kenar $2c$ dan daha küçüktür. Yani $d_1 - d_2 = 2a < 2c \Leftrightarrow a < c$ olur. Şimdi bu uzaklıkları hesaplayarak hiperbolün analitik ifadesini bu yolla elde edelim.

$$|d_1 - d_2| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a \qquad \text{olur.}$$

Bu son eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa (bu sayede mutlak değerden de kurtuluruz).

$$(x+c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 + y^4 + c^4 + 4a^4 + 2x^2y^2 + 2x^2c^2 + 2y^2c^2 - 4x^2a^2 - 4y^2a^2 - 4c^2a^2$$

$$= x^4 + y^4 + c^4 - 2x^2c^2 + 2x^2y^2 + 2y^2c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^4 + 4x^2c^2 - 4x^2a^2 - 4y^2a^2 - 4c^2a^2 = 0$$

$$x^2\left(c^2 - a^2\right) - y^2a^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$$

$c > a$ olduğundan $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ olarak tanımlanırsa $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elde edilir.

Yine aynı denklemi elde ettik. İşlemi tam yapmış olmak için diğer yönde ispatı siz yapınız.

Yakından bakılacak olursa hiperbolle yakından ilgili olan iki tane doğru vardır. Eğer birinci dördüncü (x, y) noktalarını göz önüne alırsak ((x, y) birinci dördünde olduğundan $x \geq 0$, $y \geq 0$ dir).

Buradan

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} < \frac{b}{a}x \quad \text{dir.}$$

Şimdi yeterince büyük x'ler için birinci dördündeki hiperbole ait (x, y) noktalarının $y = \dfrac{b}{a}x$ doğrusuna olan düşey uzaklık

$$\frac{b}{a}x - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$= \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

$$= \frac{b}{a}\,\frac{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \frac{b}{a}\,\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} < \frac{ab}{x} \quad \text{olur.}$$

Yani $\frac{b}{a}x - y < \frac{ab}{x}$ dir. Diğer yandan $y = \frac{b}{a}x$ doğrusu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolü ile kesişmez. Çünkü

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\frac{b^2}{a^2}x^2}{b^2} = 1$$

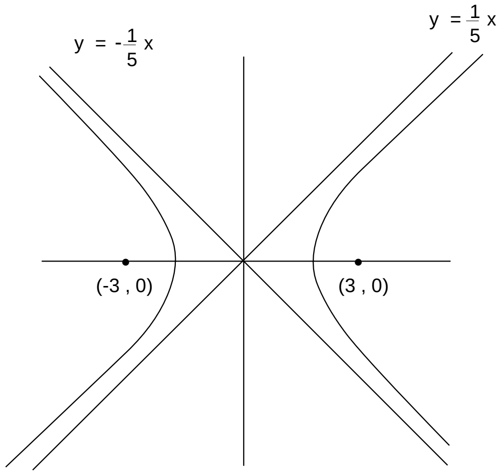
$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ olur ki bu da bir çelişki verir. Yukarıda ise yeterince büyük x' ler için hiperbol üzerindeki (x, y) noktası da $y = \frac{b}{a}x$ doğrusun yeterince yakındır.

Bu nedenle $y = \frac{b}{a}x$ doğrusuna hiperbolün **asimptotu** denir. Simetriden dolayı $y = -\frac{b}{a}x$ doğrusu da hiperbolün diğer asimptotudur. Şimdi bazı sayısal örnekler yapalım.

Örnek

Odakları $(\pm 3, 0)$ noktalarında ve asimptotları $y = \pm \frac{1}{5}x$ olan hiperbolür denklemi nedir?

Çözüm



$\frac{1}{5} = \frac{b}{a}$ $a = 5b$ olmalıdır. Diğer yandan $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 9 - a^2$ olur. Buradan $b^2 = 9 - 25b^2 \Leftrightarrow 24b^2 = 9$, $b = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ve $a = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ olur. O halde hiperbolün denklemi:

$$\frac{x^2}{\frac{600}{9}} - \frac{y^2}{\frac{24}{9}} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{600}x^2 - \frac{9}{24}y^2 = 1 \quad \text{olur}$$

Bu hiperbolün dış merkezliği $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{10\sqrt{6}}$ olur. O halde doğrultma doğruları $x = \pm\frac{10\sqrt{6}\ /\ 3}{3\ /\ 10\sqrt{6}} = \pm\left(\frac{10\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \pm\frac{600}{9}$ doğrularıdır.

Şimdi düzlemin ötelemesi altında hiperbol denkleminin nasıl değiştiğini görelim:

$$T_{(\alpha, \beta)}\,(x , y) = (x - \alpha , y - \beta)$$

ötelemesi altında $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolü de $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$ hiperbolüne taşınır.

Bu durumda odaklar $T_{(\alpha , \beta)}\,(\pm c , 0) = (\pm c - \alpha , \beta)$ noktalarına, doğrultmanları $T_{(\alpha , \beta)}\left(\pm\frac{a}{e} , 0\right) = \left(\pm\frac{a}{e} - \alpha , \beta\right)$ olur. Yani yeni doğrultmanlar $x = \pm\frac{a}{e} - \alpha$ olur. Son olarak asimptotlar $T_{(\alpha , \beta)}\left(x , \pm\frac{b}{a}x\right) = \left(x - \alpha , \pm\frac{b}{a}x - \beta\right)$ olur. Yani yeni asimptotlar $- y - \beta = \pm\frac{b}{a}(x - \alpha)$ olur.

Şimdi ötelenmiş hiperbolün denklemini açık olarak yazarsak:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2}x^2 - \frac{1}{b^2}y^2 - \frac{2\alpha}{a^2}x + \frac{2\beta}{b^2}y + \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 - 2\alpha b^2x + 2\beta a^2y + b^2x^2 - \alpha^2\beta^2 - a^2b^2 = 0$$

olur.

Şimdi şu örneği inceleyelim:

Örnek

$3x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$ hiperbolünün köşelerini, odaklarını, dış merkezliğini, doğrultmanlarını ve asimptotlarını bulunuz.

Çözüm

Kareye tamamlayarak

$$3x^2 - 6x - 2y^2 - 8y - 11 = 0$$
$$3(x^2 - 2x) - 2(y^2 + 4y) - 11 = 0$$
$$3[(x - 1)^2 - 1] - 2[(y + 2)^2 - 4] - 11 = 0$$
$$3(x - 1)^2 - 2(y + 2)^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2}{2} - \frac{(y + 2)^2}{3} = 1 \text{ elde edilir.}$$

O halde $a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ ve $b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$ olur. $c^2 = b^2 + a^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$ ve $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ bulunur. Hiperbolün merkezi $(1, -2)$ olduğundan odaklar $(1 \pm \sqrt{5}, -2)$ noktaları, doğrultmanlar $x - 1 = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$ ve asimptotlar ise $y + 2 = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\,(x - 1)$ olarak elde edilir.

Şimdi düzlemin bir R_θ dönmesi altında hiperbol denklemin nasıl değiştiğini görelim.

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

dönmesi altında

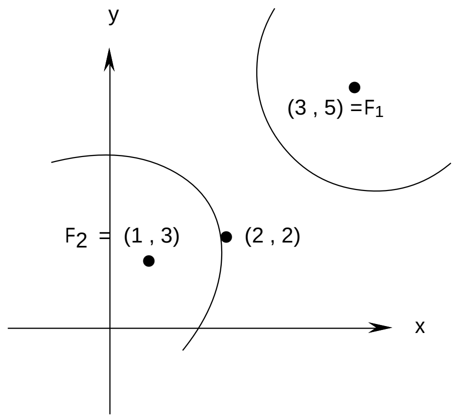
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünün görüntü

$$\frac{(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2}{a^2} - \frac{(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2}{b^2} = 1 \quad \text{şeklini alır.}$$

Odaklar, doğrultmanlar ve asimptotlarında R_θ altındaki görüntüleri yeni odakları, doğrultmanları ve asimptotları verir.

Son olarak asimptotları biribirlerine dik olan bir hiperbola bir **ikiz kenar hiperbol** denir.

Örnek

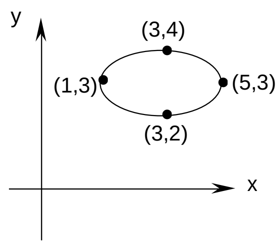


Şekilde verilen hiperbolün denklemini bulunuz.

Özet

Bu ünitede belki de analitik geometrinin gelişmesindeki en önemli motivasyon olan konik kesitlerini tanımladık ve sınıflandırdık. Dönme ve öteleme dönüşümleri kullanarak keyfi bir koordinat sisteminde bir elipsin, bir parabolün ya da bir hiperbolün analitik denkleminin ifadesinin nasıl elde edilebileceğini gördük.

Değerlendirme Soruları



1. , 2. , 3. ve 4. soruları yukarıdaki şekle göre cevaplayınız.

1. Elipsin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?
   A. $x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 44 = 0$
   B. $2x^2 + 3y^2 - 6x - 24y + 44 = 0$
   C. $x^2 + y^2 - xy - 24y + 44 = 0$
   D. $x^2 + 2y^2 - 6x - 24y + 44 = 0$
   E. $x^2 + 3y^2 - 24y - 6x = 0$

2. Elipsin doğrultmanlarının bir tanesinin denklemi nedir?

A. $\frac{2}{2\sqrt{3}}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

E. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Elipsin dış merkezliği nedir?

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

E. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. Elipsin odaklarından birisi nedir?

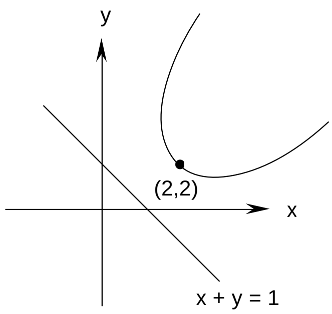
A. $(1+\sqrt{3}, 3)$

B. $(2-\sqrt{3}, 3)$

C. $(3, 4-\sqrt{3})$

D. $(3, 2+\sqrt{3})$

E. $(5-\sqrt{3}, 3)$



5. , 6. ve 7. soruları yukarıdaki şekle göre cevaplayınız.

5. Parabolün asal ekseni aşağıdaki doğrulardan hangisidir?
   A. $y = x$
   B. $y = x + 1$
   C. $y = x + 2$
   D. $y = - x$
   E. $- y = - x + 1$

6. Parabolün parametresi aşağıdakilerden hangisidir?
   A. $\frac{3}{\sqrt{2}}$
   B. $2\sqrt{3}$
   C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   D. $3\sqrt{2}$
   E. $\frac{2}{\sqrt{2}}$

7. Parabolün odağı aşağıdaki noktalardan hangisidir?
   A. $(4 , 4)$
   B. $(5 , 5)$
   C. $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$
   D. $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$
   E. $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

8. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ çemberinin yarı çapı nedir?
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4
   E. 5

9. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolünün odaklarından birinin koordinatlarını bulunuz.
   A. $(\sqrt{13}, 0)$
   B. $(0, \sqrt{13})$
   C. $(0, \sqrt{5})$
   D. $(\sqrt{5}, 0)$
   E. $(\sqrt{5}, \sqrt{13})$

10. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolünün dış merkezliği nedir′
   A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$
   B. $\frac{\sqrt{13}}{3}$
   C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
   D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
   E. $\sqrt{5}$

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. A 2. C 3. B 4. B 5. A 6. D 7. E 8. B 9. B 10. B