İkinci Dereceden Düzlemsel Eğriler

ÜNİTE 8

Yazar
Doç. Dr. Hüseyin Azcan

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- İkinci Dereceden Eğrilerin Cinslerini Belirlemeyi
- İkinci Dereceden Eğrilerin Merkezlerinin Belirlenmesi
- İkinci Derece Eğrilerin Dönme ve Öteleme Altında Değişmez Kalan Niceliklerini Öğreneceksiniz.

İçindekiler

Çalışma Önerileri

Bu üniteyi daha iyi kavrayabilmek için

- Düzlemin öteleme ve dönme dönüşümlerini tekrar gözden geçiriniz.
- Lise yıllarından bildiğiniz ikinci dereceden polinomların tam kareye tamamlanmasını tekrar gözden geçiriniz.
- İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri ve 2x2, 3x3 tipindeki kare matrislerin determinantlarını tekrar ediniz.

1. Giriş

Bu bölümdeki temel amacımız olan ikinci dereceden düzlemsel eğrileri sınıflandırmaya başlamadan önce genel anlamda eğriler teorisinin gözden geçirip, sınıflandırmanın kriteri üzerinde tartışalım. Eminim şu ana değin eğrilerle çok defa karşılaşmısınızdır. Bir eğri uzayda ya da düzlemde farklı şekillerde verilebilir. Muhtemelen sizin karşılaştığımız eğriler daha çok **R** den **R** ye fonksiyon grafiği olarak elde edilebilen eğrilerdir. Ama her eğrinin bu şekilde olması gerekmez, dahası bu şekilde verilemeyen eğrilerde vardır. Şimdi bir eğriyi tanımlayalım:

1.2. Düzlemsel Eğri

$(a, b) \subseteq \mathbf{R}$ olmak üzere (burada a'nın $-\infty$ ve b'nin de $+\infty$ olmasına izin veriyoruz)

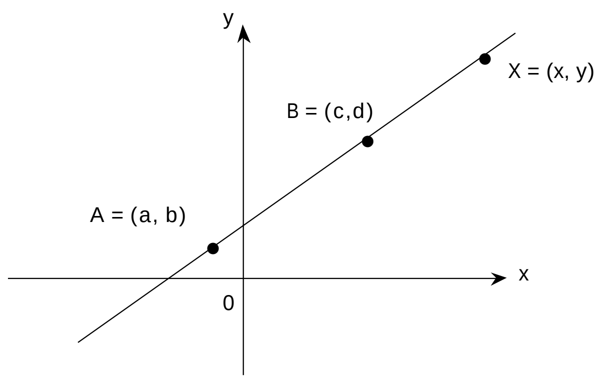
$f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}^2$, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ sürekli fonksiyonunun görüntü kümesine bir **düzlem eğrisi** ya da **düzlemsel eğri** denir. Ama genelde f fonksiyonunun kendisi eğri olarak adlandırılır. Yukarıda veriler fonksiyonda birinci koordinat fonksiyonunun x (t) ve ikinci koordinat fonksiyonun da y (t) ile gösterirsek eğriyi

$$\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = x(t) ,\ y = y(t) \quad t \in (a, b) \}$$

olarak ifade edebiliriz. Bu yazılışa eğrinin **parametrik gösterimi** denir. Ancak bir eğrinin çok değişik parametrik gösterimlerinin olacağını belirtelim. Bu parametrenin ne seçildiğine bağlıdır.

Örnek (Bir doğrunun parametrik gösterimi)

Düzlemde A = (a, b) ve B = (c, d) noktalarından geçen doğru Şekil 8.1 deki gibi çizilebilir.



Şekil: 8.1: Düzlemde A ve B Noktalarından Geçen Keyfi Bir Doğru

Doğru üzerinde alınan keyfi bir X = (x, y) noktasının koordinatlarını A nın ve B nin koordinatları cinsinden belirleyelim.

$\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AX}$ vektörleri aynı doğru üzerinde bulunduğunda bu iki vektör doğrusal bağımlıdır. Yani uygun bir $t \in \mathbf{R}$ iç $\overrightarrow{AX} = t\,\overrightarrow{AB}$ olur. Diğer yandan $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB}$ yazılabilir. Buradan,

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB}$$
$$X - O = A - O + t\,(B - A)$$
$$(x, y) = (a, b) + t\,(a - c, d - b)$$
$$(x, y) = (a + t\,(a - c)\,,\, b + t\,(d - b)$$
$$\Rightarrow x = a + t\,(a - c)$$
$$y = b + t\,(d - b) \qquad \text{elde edilir.}$$

O halde (a, b) ve (c, d) noktalarından geçen doğrunun bir parametrik gösterimi

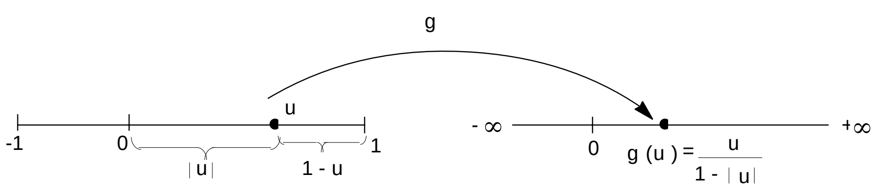
$$\begin{aligned} x(t) &= a + t\,(a - c) \\ y(t) &= b + t\,(d - b) \end{aligned} \quad , t \in \mathbf{R}$$

şeklindedir.

Başka bir parametrizasyonu da kolayca aşağıdaki şekilde elde edelim. $t \in \mathbf{R}$ yerine $t \in (-1, 1)$ şeklinde parametrize etmeye çalışalım. Bunun için eğrinin $\mathbf{R}$ üzerindeki paremetrizasyonu kullanalım. $f = (x(t), y(t))$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[r, "f = (x(t),\, y(t))"] & \mathbf{R}^2 \\ (-1, 1) \arrow[u, "g"] \arrow[ur, dashed, "f \circ g"'] & \end{tikzcd}$$

olarak adlandırılırsa yukarıda belirtilen bileşke fonksiyon bizim problemimizi çözer, yalnızca g(u) fonksiyonunu belirlemeliyiz. Bu g(u) fonksiyonunu bire bir ve örten şekilde seçebilirsek problem çözülür. Eğer (-1, 1) aralığını iki yönden sonsuz uzatmak yeterlidir.



Şekil: 8.2

(-1, 1) aralığını Şekil 8.2 deki gibi $g(u) = \frac{u}{1-|u|}$ fonksiyonu yardımıyla sündürme dönüşümü uygularsak

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(u) &= f(g(u)) \\
&= f\left(\frac{u}{1-|u|}\right) = \left(a + \frac{u}{1-|u|}(a-c),\ b + \frac{u}{1-|u|}(d-b)\right)
\end{aligned}
$$

parametrizasyonu elde edilir. Yani $u \in (0, 1)$ olmak üzere

$$x(u) = a + \frac{u}{1-|u|}(a-c)$$

$$y(u) = b + \frac{u}{1-|u|}(d-b)$$

dır. Bir eğrinin farklı parametrizasyonları için **R** nin afin dönüşümleri oldukça sık olarak kullanılırlar. Yani bir eğrinin (a, b) aralığı üzerinde bir parametrizasyonundan bir (c, d) aralığı üzerindeki parametrizasyonu bulmak için **R** nin (c, d) aralığını (a, b) aralığına resmeden bir afin dönüşümünü vermek yeterlidir. Adı geçen afin dönüşüm $f(x) = \alpha x + \beta$ olsun. Kolaylık için c yi a ya ve de yi b ye götürelim. O halde
α ve β katsayıları:

$$
\begin{aligned}
f(c) &= \alpha c + \beta = a \\
f(d) &= \alpha d + \beta = b
\end{aligned}
$$

iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümüdür. Yalnız bu yöntemin bu şekliyle çalışabilmesi için a, b, c ve d nin ne $-\infty$ ne de $+\infty$ değerlerinin almaması gerektiğine dikkat ediniz.

Örnek

(1, 2) aralığını (-3,1) aralığına **R** nin bir afin dönüşümü ile resmediniz.

Çözüm

f: **R** → **R** , $f(x) = \alpha x + \beta$ olsun.

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \alpha.1 + \beta = -3 \\
f(2) &= \alpha.2 + \beta = 1
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= -3 \\ 2\alpha + \beta &= 1 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözümü $\alpha = 4$, $\beta = -7$ olarak bulunur.

O halde istenen dönüşüm:

$f(x) = 4x - 7$ olur. Sanırım bu eşitiliğin düzlemde (1, 2) noktasının (-3, 1) noktasına birleştiren doğrunun denklemi olduğunu fark ediyorsunuzdur.

Bu yöntemle eğrileri düzlemin istediğimiz aralıkları üzerinde parametre edebiliriz.

Eğrilerin diğer bir veriliş şeklide, eğriyi x ve y ye bağlı bir denklemin çözüm kümesi olarak vermektir. Yani f(x, y) , x ve y ye bağlı bir ifade olmak üzere

$$\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = 0 \}$$

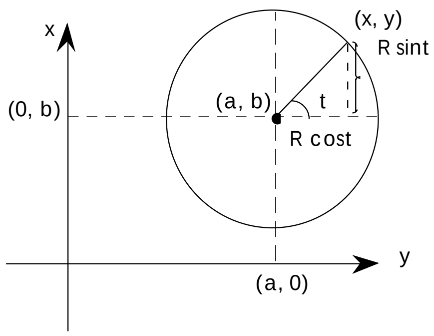
şeklindedir. Bu gösterime x eğrinin **kartezyen gösterimi** denir. Örneğin bir doğrunun kartezyen gösteriminin

$$\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = mx + n , x \in \mathbf{R} \}$$

olduğunu biliyorsunuz. Başka bir örnek olarak (a, b) merkezli R yarıçaplı çemberin kartezyen gösteriminin

$$\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \}$$

olduğunu öğrenmiştik. Bu çemberin parametrik denklemi de:



Şekil 8.3: (a, b) Merkezli R Yarıçaplı Çember

Şekil 8.3'den faydalanılarak hesaplanabilir. (x, y) koordinatları x = a + R cost ve y = b + R sint olarak kolayca bulunabileceğini görünüz.

Biz kartezyen gösterimi esas olarak eğri için

$$l: f(x, y) = 0$$

gösterimi kullanacağız. Bugösterimden

$$l = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

kümesi anlaşılmalıdır. Diğer taraftan eğer f (x, y) ifadesi x ve y ye bağlı bir polinom ise böyle bir eğriye **cebirsel eğri** denir, eğer polinom olarak ifade edilemiyorsa eğriye **aşkın** ya da **transandant eğri** denir. Sinüs, kosinüs, logaritma gibi operatörlerle verilen eğriler aşkın eğri örnekleridir. Bizim temel konumuz ise cebirsel eğriler olacaktır.

Eğrilerin denkliğine ise şu şekilde yaklaşılabilir.

l: $f(x, y) = 0$ ve d: $g(x, y) = 0$ iki düzlemsel eğriler olsunlar.

Eğer bu iki eğriden birinin denklemi uygun bir (dik) kordinat sisteminde diğerinin denklemiyle aynı oluyorsa **bu iki eğriye denktir** denir.

Kitabın başında da belirtildiği gibi analitik geometride ki en büyük sıkıntı yapılan işlerin koordinat sistemlerine bağlı olması idi. Bunun direkt bir sonucu olarak eğri denklemi koordinat sisteminin seçilişi ile çok yakından bağımlıdır. Bu bağlamda öncelikle daha bilindik olan birinci dereceden eğrileri göz önüne alalım.

2. Birinci Dereceden Düzlemsel Eğriler

Birinci dereceden (tekil olmayan) bir düzlem eğrisi $(a, b) \neq (0, 0)$ olmak üzere

$$l : ax + by + c = 0$$

olarak verilen eğridir. Şimdi bu l eğrisinin uygun bir koordinat sisteminin x-ekseni olarak seçilebileceğini görelim. Gerçekten de $x' = ax + by + c$ ve $y' = -bx + ay$ olarak seçilirse $x'O'y'$ koordinat sisteminde l eğrisinin denklemi $y' = 0$ halini alır.

Sonuç olarak düzlemde bütün tekil olmayan birinci dereceden eğriler birbirlerine denktirler ve bu eğrinin denklemi uygun bir koordinat sisteminde $y = 0$ olarak seçilebilir.

Şimdi ikinci dereceden cebirsel eğrilere yoğunlaşılım.

3. İkinci Dereceden Cebirsel Düzlem Eğrileri

Düzlemde ikinci dereceden bir genel bir eğrinin denklemi $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{R}$ olmak üzere

$$F(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

formundadır. Burada ikinci dereceden terimler x^2 , xy , y^2 nin katsayılarının hepsi sıfır ise $F(x, y)$ birinci dereceden bir eğri olur. Bu nedenle A, B, C den en az bir tanesi sıfırdan farklı olmalıdır. Bu tipten eğrilerin ilk örneklerini bir önceki bölümde gördük. Bunlar çember, elips, hiperbol ve parabol idi. Bu bölümde ise tekil olmayan ikinci dereceden tekil olmayan düzlem eğrilerinin bunlardan ibaret olduğunu göreceğiz. İkinci dereceden eğrileri incelerken kullanacağımız en önemli araçlar dönme ve öteleme olduğundan öncelikle $F(x, y) = 0$ eğrisinin dönme ve öteleme altında değişmez kalan niceliklerini incelemekle başlayalım.

3.1. Dönme ve Öteleme Altında Değişmez Kalan Nicelikler

$F(x, y) = 0$ eğrisine $x = x' + a$, $y = y' + b$ ötelemesi uygulayalım. Bu durumda $F(x, y) = 0$ eğrisinin yeni koordinat sistemindeki denklemi:

$$F(x', y') = A(x' + a)^2 + B(y' + b)^2 + 2C(x' + a)(y' + b) + 2D(x' + a) + 2E(y' + b) + F = 0$$

olur. Bu ifade basitleştirilise

$$Ax'^2 + By'^2 + 2Cx'y' + 2(Aa + Cb + D)x' + 2(Bb + Ca + E)y' + Aa^2 + Bb^2 + 2Cab + 2Da + 2Eb + F = 0 \qquad (8.1)$$

şeklini alır. Görüldüğü gibi öteleme altında ikinci dereceden terimleri katsayıları değişmedi. Sonuç olarak bu gözlemimizi aşağıdaki ifade ile özetleyebiliriz.

F(x, y) = 0 ikinci dereceden cebirsel eğrisinde ikinci dereceden terimlerin katsayıları düzlemin ötelemesinden etkilenmez.

Şimdi benzer uygulamayı dönme için yapalım. Düzleme bir R_θ dönmesi verildiğinde koordinat değişimi

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

şeklinde idi. Şimdi $F(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F$ olmak üzere $F(x', y')$ ifadesini hesap edelim.

$$\begin{aligned} F(x', y') = {} & A(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + B(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 \\ & + 2C(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + 2D(x'\cos\theta - y'\sin\theta) \\ & + 2E(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + F = 0 \end{aligned}$$

olur. Yine bu ifade basitleştirilirse:

$$\begin{aligned} F(x', y') &= A x'^2\cos^2\theta + A y'^2\sin^2\theta - 2A x'y'\cos\theta\sin\theta \\ &\quad + B x'^2\sin^2\theta + B y'^2\cos^2\theta + 2B x'y'\sin\theta\cos\theta \\ &\quad + 2C x'^2\sin\theta\cos\theta + 2C x'y'\cos^2\theta - 2C x'y'\sin^2\theta - 2C y'^2\sin\theta\cos\theta \\ &\quad + 2D x'\cos\theta - 2D y'\sin\theta + 2E x'\sin\theta + 2E y'\cos\theta + F \\ &= x'^2(A\cos^2\theta + B\sin^2\theta + 2C\sin\theta\cos\theta) \\ &\quad + y'^2(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta - 2C\sin\theta\cos\theta) \\ &\quad + 2a'y'(-A\cos\theta\sin\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta - C\sin^2\theta) \\ &\quad + 2x'(D\cos\theta + E\sin\theta) + 2y'(-D\sin\theta + E\cos\theta) + F. \end{aligned}$$

son ifade $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ ve $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ olduğu anımsanıp tekrar düzenlenirse:

$$F(x', y') = (A \cos^2\theta + B \sin^2\theta + C \sin^2\theta)\, x'^2 + (A \sin^2\theta + B \cos^2\theta - C \sin^2\theta) y'^2$$
$$+ 2\left(\frac{(B - A)}{2} \sin 2\theta + C \cos 2\theta\right) x' y' + 2(D \cos\theta + E \sin\theta)\, x'$$
$$+ 2\,(-D \sin\theta + E \cos\theta)\, y' + F \qquad (8.2)$$

olur. Kısalık için, sembolik olarak:

$$A' = A \cos^2\theta + B \sin^2\theta + C \sin^2\theta$$
$$B' = A \sin^2\theta + B \cos^2\theta - C \sin^2\theta$$
$$C' \left(\frac{(B - A)}{2} \sin 2\theta + C \cos 2\theta\right)^2$$
$$D' = D \cos\theta + E \sin\theta$$
$$E' = -D \sin\theta + E \cos\theta$$

olmak üzere

$$F(x', y') = A' x'^2 + B' y'^2 + 2 C' x' y' + 2 D' x' + 2 E' y' + F$$

olarak yazalım. Görüldüğü gibi ikinci derse terimlerin katsayıları A', B' ve C' değişti, fakat değişmez kalan iki önemli nicelik hâla vardır. Önce $A' + B'$ nü hesaplayalım.

$$(A' + B') = (A \cos^2\theta + B \sin^2\theta + C \sin^2\theta) + (A \sin^2\theta + B \cos^2\theta - C \sin^2\theta)$$
$$= A \cos^2\theta + A \cos^2\theta + B \sin^2\theta$$
$$= A (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + B (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = A + B$$

Görüldüğü gibi $A' + B' = A + B$ oldu.

Diğer yandan $A'B' - C'^2$ ifadesini hesaplarsak:

$$A'B' - C'^2 = (A \cos^2\theta + B \sin^2\theta + C \sin^2\theta) + (A \sin^2\theta + B \cos^2\theta - C \sin^2\theta)$$
$$- \left(\frac{(B - A)}{2} \sin 2\theta + C \cos 2\theta\right)^2$$
$$= A^2 \cos^2\theta \sin^2\theta + AB \cos^4\theta - AC \cos^2\theta \cos^2\theta + AB \sin^4\theta + B^2 \sin^2\theta \cos^2\theta$$
$$- BC \sin^2\theta \sin 2\theta + AC \sin^2\theta \sin^2\theta + BC \sin 2\theta \cos^2\theta - C^2 \sin^2 2\theta$$
$$- \frac{(B - A)^2}{4} \sin^2 2\theta - C^2 \cos^2 2\theta - C (B - A) \cos 2\theta \sin 2\theta$$
$$= AB - C^2 \text{ elde edilir.}$$

O halde

$$F(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ikinci dereceden cebirsel bir eğri olsun. Düzleme dönme ve öteleme uygulandıktan sonra $F(x, y) = 0$ eğrisinin denklemi $F(x', y') = 0$ ise $A + B = A' + B'$ ve $AB - C^2 = A'B' - C'^2$ dir.

Bu iki nicelik incelememizin temelini oluşturacaktır.

3.2. Bir Merkeze Sahip Olan İkinci Derece Eğriler

Bazı ikinci dereceden eğrilerin denklemi düzlemin uygun bir ötelemesi altında $F(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy$ şekline dönüşür. Apaçık olarak eğer $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ için $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow F(-x, y) = 0 \Leftrightarrow F(x, -y) = 0 \Leftrightarrow F(-x, -y) = 0$ dir. Yani bir $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ noktası eğriye ait bir nokta ise bu noktanın eksenlere ve başlangıç noktasına göre simetrikleride eğriye aitdir. Bu durumda bu ötelenmiş olan yeni koordinat sisteminin başlangıç noktasına eğrinin **simetri merkezi** (ya da kısaca **merkezi)** demek yanlış olmaz. Şimdi hangi eğrilerin bir merkeze sahip olduklarını inceleyelim.

$$F(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F$$

eğrisi düzlemin $x' = x - a,\ y' = y - b$ ötelemesi altında

$$F(x', y') = A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x + 2E'y' + F'$$

olsun. Burada (8.1) eşitliğinden faydalanarak

$$A = A',\ B = B',\ C = C',\ D' = Aa + Cb + D,\ E' = Bb + Ca + E$$
$$F' = Aa^2 + Bb^2 + 2Cab + 2Da + 2Eb + F$$

yazabiliriz.

Eğer eğrinin bir (a, b) merkezi olacaksa bu durumda

$$\begin{array}{lcl} 2(Aa + Cb + D) = 0 & & Aa + Cb = -D \\ & \Leftrightarrow & \\ 2(Bb + Ca + E) = 0 & & Ca + Bb = -E \end{array}$$

olmalıdır. Bu iki bilinmeyenli denklemin (tek) çözümünün olması için gerekli ve yeterli koşul bu denklemin sisteminin katsayılar matrisinin determinatının sıfırdan farklı olmasıdır ($D = E = 0$ ise çözüm varsa sonsuz tanedir)

Yani

$$\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = AB - C^2 \neq 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

Bu durumda çözüm

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -D & C \\ -E & B \end{vmatrix}}{AB - C^2} = \frac{EC - DB}{AB - C^2}, \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} A & -D \\ C & -E \end{vmatrix}}{AB - C^2} = \frac{DC - AE}{AB - C^2}$$

şeklindedir. Diğer yandan

$$F' = Aa^2 + Bb^2 + 2\,Cab + 2Da + 2Eb + F = F\,(a, b)$$

dir. O halde eğrinin yeni ötelenmiş yeni koordinat sistemindeki denklemi

$$F(x', y') = Ax'^2 + By'^2 + 2Cx'\,y' + F(a, b)$$

şeklini alır. Şimdi bu eğrinin denkleminde düzlemin uygunbir R_θ dönmesi yardımıyla xy teriminin katsayısını sıfır yapabiliriz.

Dönmenin koordinat değişimi

$$x' = x''\cos\theta - y''\sin\theta$$
$$y' = x''\sin\theta + y''\cos\theta$$

kullanılarak eğrinin yeni denklemi

$$F(x'', y'') = A''\,x''^2 + B''\,y''^2 + 2C''\,x''\,y'' + F'' = 0$$

ve

$$\left.\begin{aligned} A'' &= A'\cos^2\theta + B'\sin^2\theta + C'\sin 2\theta \\ B'' &= A'\sin^2\theta + B'\cos^2\theta + C'\sin 2\theta \\ C'' &= \frac{B - A}{2}\sin 2\theta + \cos 2\theta \\ F'' &= F(x_0, y_0) \end{aligned}\right\}$$

olur. (8.2) eşitliğinden

Yani θ dönme açısı

$$\frac{B - A}{2}\sin 2\theta + C\,\cos 2\theta = 0$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2C}{B - A}$$

seçilirse x'' O'' y'' koordinat sisteminde eğrinin denklemi

$$F(x'', y'') = A''\,a''^2 + B''\,y''^2 + F(a, b)$$

şeklini alır. Eğrinin ne olduğunu belirlemeye geçmeden önce F(a, b)'i açık olarak hesaplayalım.

$$a = \frac{EC - DB}{AB - C^2}, \qquad b = \frac{DC - AE}{AB - C^2}$$

kullanılarak

$$F(a,b) = A\left(\frac{EC - DB}{AB - C^2}\right)^2 + B\left(\frac{DC - AE}{AB - C^2}\right)^? + 2C\left(\frac{EC - DB}{AB - C^2}\right)\left(\frac{DC - AE}{AB - C^2}\right)$$

$$+ 2D\left(\frac{EC - DB}{AB - C^2}\right) + 2E\left(\frac{DC - AE}{AB - C^2}\right) + F$$

$$= \frac{EC - DB}{\left(AB - C^2\right)^2}\left[A\left(EC - DB\right) + 2C\left(DC - AE\right)\right]$$

$$+ \frac{DC - AE}{\left(AB - C^2\right)^2}\left[B\left(DC - AE\right) + 2C\left(EC - DB\right)\right]$$

$$+ \frac{2}{AB - C^2}\left[D\left(EC - DB\right) + E\left(DC - AE\right)\right] + F$$

$$= \frac{EC - DB}{\left(AB - C^2\right)^2}\left(2DC^2 - ADE\right) + \frac{DC - AE}{\left(AB - C^2\right)^2}\left(2EC^2 - BAE\right)$$

$$+ \frac{2}{AB - C^2}\left[D(EC - DB) + E(DC - AE)\right] + F$$

$$= \frac{D(EC - DB)}{\left(AB - C^2\right)^2}\left(2C^2 - AE\right) + \frac{E(DC - AE)}{\left(AB - C^2\right)^2}\left(2C^2 - BA\right)$$

$$+ \frac{2D(EC - DB)}{\left(AB - C^2\right)} + \frac{2E(DC - AE)}{\left(AB - C^2\right)} + F$$

$$= \frac{A(BF - E^2) - C(CF - DE) + D(CE - DB)}{AB - C^2}$$

olur. Şimdi bu oranın paydası $\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix}$ matrisinin determinantı idi. Benzer şekilde pay ise $\begin{vmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ matrisinin determinantıdır.

Yine kısalık için:

$$d = \det\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} \quad \text{ve} \quad \Delta = \det\begin{vmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

olarak adlandırılırsa eğrinin denklemi:

$$A''\,x''^2 + B''\,y''^2 + \frac{\Delta}{d} = 0 \text{ olur}$$

Şimdi eğriyi

$$A'' + B'' = A + B, \quad d = AB - C^2 \neq 0, \quad F(a, b) = \frac{\Delta}{d}$$

ifadelerini kullanarak sınıflandırabiliriz.

1. Eğer $d > 0$ ise

   $d = AB - C^2 > 0 \Leftrightarrow AB > C^2 > 0$ olduğundan A ve B nin işaretleri aynıdır. O halde

   $A + B > 0 \Rightarrow A > 0, \; B > 0$ ve $A + B < 0 \Rightarrow A + B < 0$ dır.

Şimdi Δ nin durumuna göre alt durumları inceleyelim:

i) $\Delta = 0 \Rightarrow$ eğrinin denklemi $A'' x''^2 + B'' y''^2 = 0$ olur.

   $d = AB - C^2 = A'' . B'' > 0$ olduğundan bu denklemin tek çözümü (0, 0) noktasıdır.

ii) $\Delta < 0 \Rightarrow$ eğrinin denklemi $A'' x''^2 + B'' y''^2 = \frac{\Delta}{d}$ olur.

   Bu durumda eğer $A'' + B'' = A + B > 0$ ise eğri boş küme, eğer $A'' + B'' = A + B < 0$ ise eğri bir elipstir.

iii) $\Delta > 0 \Rightarrow$ eğrinin denklemi $A'' x''^2 + B'' y''^2 = -\frac{\Delta}{d}$ olur.

   Bu durumda eğer $A'' + B'' = A + B > 0$ ise eğri boş küme, eğer $A'' + B'' = A + B < 0$ ise eğri bir elipstir.

2. Eğer $d < 0$ ise

   $d = AB - C^2 = A'' . B'' < 0$ ise A'' ve B'' zıt işaretlidir.

i) $\Delta = 0$ ise eğri denklemi $A'' x''^2 + B'' y''^2 = 0$ olur. Bu ise başlangıç noktasında kesişen iki doğru gösterir.

ii) $\Delta > 0$ ise eğri $A'' x''^2 + B'' y''^2 = -\frac{\Delta}{d}$, $-\frac{\Delta}{d} > 0$ ve $A'' . B'' < 0$ olduğundan eğri bir hiperboldür.

iii) $\Delta < 0$ ise eğri $A'' x''^2 + B'' y''^2 = -\frac{\Delta}{d}$, $-\frac{\Delta}{d} < 0$ ve $A'' . B'' < 0$ olduğundan eğri bir hiperboldür.

Şimdi son durum olan $d = AB - C^2 = 0$ (tek bir merkezin olmaması durumunu inceleyelim). Bu durumda eğer $A + B > 0$ ise $A \geq 0$ ve $B \geq 0$ ve $A + B < 0$ ise $A \leq 0$,

$B \leq 0$ dır. Çünkü $AB - C^2 = 0 \Leftrightarrow AB = C^2 \geq 0$ dır. Eğer $A + B = 0$ olsaydı $d = 0$ olduğundan $A = B = C = 0$ olurdu, bu da olamaz. Eğrinin denklemi

$$F(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F$$

olsun. $AB = C^2$ olduğundan $Ax^2 + By^2 + 2Cxy = (\sqrt{A}\,x + \sqrt{B}\,y)^2$ dir. Eğer A ve B sıfırdan küçük ise $-F(x, y)$ eğrisini alırız. Çünkü $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow -F(x, y) = 0$ dır. Bu durumda eğri

$$F(x, y) = (\sqrt{A}\,x + \sqrt{B}\,y)^2 + 2Dx + 2Ey + F =$$

olur. $A + B \neq 0$ olduğundan

$$F(x, y) = A + B\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+B}}\,x + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A+B}}\,y\right)^2 + 2Dx + 2Ey + F =$$

dır.

$\left(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+B}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A+B}}\right)^2 = 1$ olduğundan uygun bir θ açısı için

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{A}{A+B}} \qquad \text{ve} \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{B}{A+B}}$$

yazılabilir.

Düzleme bu θ açısı kadar bir dönme uygulanırsa

$$x' = x\sqrt{\frac{B}{A+B}} - y\sqrt{\frac{A}{A+B}} = \frac{1}{\sqrt{A+B}}\left(x'\sqrt{B} - y'\sqrt{A}\right)$$

$$y' = x\sqrt{\frac{A}{A+B}} - y\sqrt{\frac{B}{A+B}} = \frac{1}{\sqrt{A+B}}\left(x'\sqrt{A} - y'\sqrt{B}\right)$$

ve

$$x = x'\sqrt{\frac{B}{A+B}} + y'\sqrt{\frac{A}{A+B}}$$

$$y = -x'\sqrt{\frac{A}{A+B}} + y'\sqrt{\frac{B}{A+B}}$$

olur. Bu durumda eğrinin denklemi

$$y'^2 + 2D\left(x'\sqrt{\frac{B}{A+B}} + y'\sqrt{\frac{B}{A+B}}\right) + 2E\left(-x'\sqrt{\frac{A}{A+B}} + y'\sqrt{\frac{B}{A+B}}\right) + F =$$

uygun işlemler yapılırsa

$$y'^2 + \frac{2}{\sqrt{A+B}}\left(D\sqrt{B} - E\sqrt{A}\right)x' + \frac{2}{\sqrt{A+B}}\left(D\sqrt{B} - E\sqrt{A}\right)y' + F = 0$$

şeklini alır. Eğer hem D hem de E sıfır ise denklem

$$y'^2 + F = 0$$

halini alır. Eğer $F > 0$ ise eğri bir boş küme $F = 0$ ise $y'^2 = 0$ doğrusu eğer $F < 0$ ise $y' = \sqrt{F}$ ve $y' = -\sqrt{F}$ paralel doğru çiftini gösterir.

Eğer D ve E den birisi sıfırdan farklı ise bu eğri ötelenmiş bir parabolü gösterir.

Şimdi örnekleri inceleyelim.

Örnek

$x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$ ikinci derece eğrisinin cinsini belirleyiniz.

Çözüm

Bu eğri için $A = 1$ $\quad D = 4$
$B = -1$ $\quad E = 2$
$C = 1$ $\quad F = -8$

dir. $d = AB - C^2 = -1 - 1 = -2 < 0$

$$\Delta = \det\begin{vmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (8 - 4) - (-8 - 8) + (2 + 4) = 26 > 0$$

Son olarak $A + B = 0$

olduğundan $F(x, y) = 0$ eğrisi bir hiperbol gösterir. Bu hiperbolün (a, b) merkezi $x = x' + a$, $y = y' + b$ ifadeleri eğrinin denklemine yerine konularak

$$(x' + a)^2 + 2(x' + a)(y' + b)(y' + b)^2 + 8(x' + a) + 4(y' + b) - 8 = 0$$
$$x'^2 + 2x'y' - y'^2 + x'(4a + 2b + 8) + y'(2a - 4b + 4) + a^2 + 2ab - b^2$$
$$+ 8a^2 + 4b - 8 = 0$$

olur.

Merkez birinci mertebeden terimlerin katsayılarını sıfır yapan a, b değerleri olduğundan x' ve y' nün katsayılarını sıfıra eşitleyerek gerekli a, b değerlerini hesaplayabiliriz.

$$\begin{matrix} 4a + 2b + 8 = 0 \\ 2a - 4b + 4 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2a + 2b + 4 = 0 \\ a - 2b + 2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow a = -2,\ b = 0$$

O halde merkez (-2, 0) noktasıdır. Eğrinin bu yeni koordinat sistemindeki denklemi a ve b değerleri yerine konularak

$$x'^2 + 2x'y' - y'^2 - 20 = 0$$

olur. Şimdi uygun bir R_θ dönmesi ile yeni bir koordinat sisteminde eğirinin denkleminde $x''. y''$ çarpım teriminin katsayısını sıfır yapalım.

$$x' = x''\cos\theta - y''\sin\theta$$
$$y' = x''\sin\theta + y''\cos\theta$$
$$\Rightarrow x'^2 + 2x'y' - y'^2 - 20$$
$$= (x''\cos\theta - y''\sin\theta)^2 + 2(x''\cos\theta - y''\sin\theta)(x''\sin\theta + y''\cos\theta) - (x''\sin\theta + y''\cos\theta)^2 - 8 = x''^2(\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta) + y''^2(\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta)$$
$$+ 2x''y''(-\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta) - 8 = 0$$

$x''y''$ teriminin katsayısını sıfır yapan θ açısı

$$-\sin 2\theta + \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \sin 2\theta = \cos 2\theta$$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{8}$ alabiliriz.

Bu θ değeri

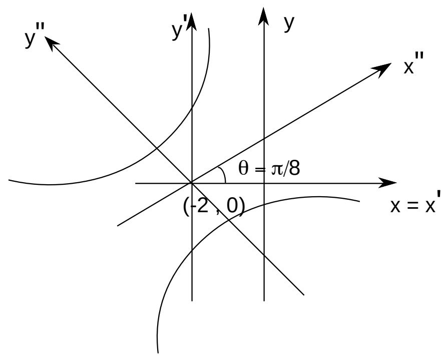
$$x''^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta) + y''^2(\cos 2\theta - \sin 2\theta) + 2x''y''(-\sin 2\theta + \cos 2\theta) - 8 = 0$$

denkleminde yerine konulursa

$\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan

$$x''^2\left(\sqrt{2}\right) + y''^2\left(-\sqrt{2}\right) = 8$$

$\sqrt{2}x''^2 - \sqrt{2}y''^2 = 8 \Leftrightarrow x''^2 - y''^2 = \dfrac{8}{\sqrt{2}}$ hiperbolü elde edilir. O halde bu hiperbol Şekil 8.4'deki gibi çizilebilir.



Şekil: 8.4: $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$ Hiperbolü

Örnek

$3x^2 + 6xy + 2y^2 - 4y + 2x + 1 = 0$ ikinci derece eğrisinin cinsini belirleyiniz.

Çözüm

A = B , B = 2 , C = 6 , D = 1 , E = -2 , F = 1 olduğundan

$d = AB - C^2 = 0$ dır.

O halde:

$$\underbrace{3x^2 + 6xy + 2y^2}_{(\sqrt{3}x + \sqrt{2}y)^2} - 4y + 2x + 1 = (\sqrt{3}x + \sqrt{2}y)^2 - 4y + 2x + 1 =$$

$$\Leftrightarrow \quad 5\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}y\right)^2 - 4y + 2x + 1 = 0$$

$$x' = \sqrt{\frac{3}{5}}\,x - \sqrt{\frac{2}{5}}\,y \qquad y' = \sqrt{\frac{3}{5}}\,x + \sqrt{\frac{2}{5}}\,y$$

ya da eşdeğer olarak

$$x = \sqrt{\frac{3}{5}}\,x' + \sqrt{\frac{2}{5}}\,y \qquad y = \sqrt{\frac{2}{5}}\,x' + \sqrt{\frac{3}{5}}\,y'$$

bu yeni koordinatlar denklemde yerine konulursa:

$$\Rightarrow \quad 5y'^2 - 4\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\,x' + \sqrt{\frac{3}{5}}\,y'\right) + 2\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,x' + \sqrt{\frac{2}{5}}\,y'\right) + 1 =$$

$$\Rightarrow \quad 5y'^2 + \left(-4\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)y' + \left(4\sqrt{\frac{2}{5}}\,x' + 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)x' + 1 =$$

olur. Bu elde edilen parabolün şeklini siz çizmeye çalışınız.

Özet

Bu bölümde düzlemsel eğriler arasında denklik kavramını tanımlayıp ikinci dereceden cebirsel düzlem eğrilerinin sınıflamış olduk. Ortaya çıkan ikinci dereceden cebirsel düzlem eğrileri (dejenere olmamış olanlar) daha önceden bildiğimiz çember, elips, parabol ve hiperboldür.

Değerlendirme Soruları

1. $x^2 + xy - y^2 + x - y = 0$ ikinci derece eğrisinin merkezini bulunuz.

   A. $\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$

   B. $\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

   C. $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

   D. $\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$

   E. $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$

2. $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$ ikinci derece eğrisi hangi R_θ dönmesinden sonra yeni koordinat sistemindeki denkleminde $x'y'$ teriminin katsayısı sıfır olur?

   A. $\frac{\pi}{4}$

   B. $\frac{\pi}{2}$

   C. $\frac{\pi}{3}$

   D. $\frac{\pi}{6}$

   E. $\frac{\pi}{8}$

3. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

   a) $x = 0$ ve $y = 0$ eğrileri aynı cinstendir.
   b) $x^2 + y^2 = 1$ ve $2x^2 + y^2 = 3$ eğrileri aynı cinstendir.
   c) $x^2 - y^2 = 1$ ve $2x^2 + 3y^2 = -1$ eğrileri aynı cinstendir.

   A. {a}
   B. {a, b}
   C. {b}
   D. {c}
   E. {a, c}

4. Aşağıdaki eğrilerden hangisi bir paraboldür?

   A. $x^2 + xy - y^2 + 3x - 4y = 0$
   B. $x^2 + 3xy - 2y^2 + 6x - 9 = 0$
   C. $4x^2 + 2y + y^2 = 0$
   D. $3x^2 + 6xy + 3y^2 + x + y = 0$
   E. $x^2 + xy + 4y^2 + 6y - x + 1 = 0$

5. Aşağıdaki eğrilerden hangisi bir hiperboldür?
   A. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy + 3x + 4y - 1 = 0$
   B. $x^2 + y^2 + xy + x - y + 4 = 0$
   C. $x^2 + 2y^2 + xy + 3x + 4y - 1 = 0$
   D. $x^2 - y^2 = 0$
   E. $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

6. Aşağıdaki eğrilerden hangisi bir elipstir?
   A. $2x^2 + 2y^2 + 4xy - x + 4y + 3 = 0$
   B. $2x^2 +xy + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$
   C. $x^2 + 4y^2 + 6xy + 3x - 2y - 1 = 0$
   D. $2xy + y^2 + 6x - \frac{y}{2} + \frac{1}{2} = 0$
   E. $xy + x - y + 1 = 0$

7. Aşağıdaki eğrilerden hangisi paraboldür?
   A. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$
   B. $x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
   C. $x^2 - xy + 3y^2 + 6x - y = 0$
   D. $2x^2 + 3xy - y^2 + \frac{x}{2} - y + 3 = 0$
   E. $x^2 + xy + 4x - y + 6 = 0$

8. $x^2 + 8xy + 7y^2 + 8x + 14y - 2 = 0$ ikinci derece eğrisinin merkezini bulunuz.
   A. (1, 1)
   B. (1, -1)
   C. (-1, 1)
   D. (0, -1)
   E. (0, 1)

9. Aşağıda verilen eğrilerden hangisi hiperboldür?
   A. $x^2 + 8xy + 7y^2 + 8x + 14y - 2 = 0$
   B. $3x^2 + 8xy + 7y^2 + 8x + 14y - 2 = 0$
   C. $4x^2 + 9xy + 8y^2 + 8x + 14y + 2 = 0$
   D. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 8x - 3y = 0$
   E. $x^2 + xy + y^2 = 0$

10. Aşağıda verilen eğrilerden hangisi bir elipstir?
   A. $xy + 3 = 0$
   B. $1/2x^2 + xy + 1/2y^2 = 0$
   C. $3x^2 + 2y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$
   D. $3x^2 + 6xy + 3y^2 + x - 2y + 1 = 0$
   E. $2x^2 + 8xy + 8y^2 + 6x - 2y - 1/2 = 0$

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. D 2. A 3. B 4. D 5. E 6. B 7. A 8. D 9. A 10. C