Uzayın Analitik Geometrisi

ÜNİTE

9

Yazar

Doç.Dr. Hüseyin AZCAN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Düzlemde geliştirilen analitik geometri modeline benzer şekilde üç boyutlu uzay için de bir analitik geometri modeli geliştirilecek,
- Bu modelin doğruları tanımlanıp sağlaması gereken aksiyomları kontrol edilecek,
- Üç boyutlu uzayda düzlem tanımlanacak,
- Doğruların ve düzlemlerin biribirlerine göre durumları incelenecektir.

İçindekiler

- Doğrular ve Düzlemler 181
- Uzayda Doğrular 181
- Uzayda Doğruların Biribirlerine Göre Durumları 184
- Uzayda Düzlem 186
- Üç Noktadan Geçen Düzlemin Denklemi 188
- Düzlemlerin Biribirlerine Göre Durumları 190
- Bir Düzlemle Bir Doğru Arasındaki Açı 195
- Özet 198

Çalışma Önerileri

Bu üniteyi çalışmadan evvel,

- Öklidin geometri aksiyomlarını tekrarlayınız.
- Düzlemde vektörler konusunu tekrar gözden geçiriniz.
- Doğrusal denklem sistemlerinin çözme yöntemlerini tekrarlayınız.

1. Doğrular ve Düzlemler

Bu kitapta şimdiye kadar Öklidin geometri için verdiği aksiyomları sağlayan düzlemde bir model geliştirdik. Bu model düzlemin analitik geometrisi oldu. Kabaca tekrar gözden geçirecek olursak noktalar kümesini $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ kartezyen çarpım kümesi ve doğrular kümesi de $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c = 0 , (a, b) \neq (0, 0)\}$ olarak tanımlandı. Bu tanımlamalar yardımıyla düzlemde Öklid aksiyomlarını sağlayan bir model geliştirilmiş oldu. Şimdi benzer bir modeli üç boyutlu uzay $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ için geliştireceğiz. Bu modeli inşa ederken düzlem için elde edilen modeli örnek alıp bu modeli biraz değiştirip üç boyutlu hatta biraz düşünce zenginliği ile daha yüksek boyutlu uzaylara uyarlanabilir hale getireceğiz. Fakat düzlem için modele konu olan doğrular kümesi yukarıda belirtildiği gibi

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax + by + c = 0 \;, \; a, b, c \in \mathbf{R} \;\text{ ve }\; (a, b) \neq (0, 0)\}$$

olarak alırsak bu modeli uzaya uyarlamak çok zordur. Çünkü bu haliyle doğrular düzlemin, düzleme has özellikleri ile tanımlanmıştır. Fakat biz bu kitabın ilk bölümlerinde doğruları bu tanıma eşdeğer bir şekilde vektörlerle tanımladık. Vektörler yalnızca düzleme has bir özellik değildir. Yani özellikleri açısından düzlemde olduğu gibi vektörlerden bahsedebildiğimiz her küme üzerinde düzlemdeki gibi doğrular tanımlayabiliriz. Düzlemde doğrular (yine yukarıdaki tanımın yer yer kullandığımız başka bir eşdeğeri) şu şekilde tanımlanabilir: $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ ve $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$ olmak üzere

$$\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = \lambda a_1 + (1 - \lambda)\, b_1 \;,\; y = \lambda a_2 + (1 - \lambda)\, b_2 \;,\; \lambda \in \mathbf{R} \}$$

olarak tanımlanabilir. Aslında burada (a_1, a_2) ve (b_1, b_2) noktalarından geçen doğrunun parametrik formunu yazdık. Bu tür bir doğru tanımı da üç ve yüksek boyutlu uzaylarda doğru tanımı olarak alınabilir. Şimdi uzayda doğruları tanımlayalım.

2. Uzayda Doğrular

Uzayda noktalar kümesini $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}$ olarak tanımlayalım. Bu kümeyi zaten ikinci bölümde tanımlamıştık. Şimdi bu noktalar kümesi üzerinde doğruları $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{R}$ ve $(a_1, a_2, a_3) \neq (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere

$$\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = \lambda a_1 + (1 - \lambda)\, b_1 \;,\; y = \lambda a_2 + (1 - \lambda)\, b_2 \;,\; z = \lambda a_3 + (1 - \lambda)\, b_3 \;,\; \lambda \in \mathbf{R} \}$$

olarak tanımlayalım. Sizin de fark ettiğiniz gibi düzlem için kullandığımız doğruları hemen hemen aynı formda üç boyutlu uzay için uyarladık. Şimdi parametrik formda λ yı yok ederek doğrunun kartezyen denklemi aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$x = \lambda a_1 + (1 - \lambda) b_1 = b_1 + \lambda (a_1 - b_1)$$
$$y = \lambda a_2 + (1 - \lambda) b_2 = b_2 + \lambda (a_2 - b_2)$$
$$z = \lambda a_3 + (1 - \lambda) b_3 = b_3 + \lambda (a_3 - b_3)$$

$$\Rightarrow \quad a_1 - b_1 \neq 0 \quad \text{ise} \quad \lambda = \frac{x - b_1}{a_1 - b_1}$$

$$a_2 - b_2 \neq 0 \quad \text{ise} \quad \lambda = \frac{y - b_2}{a_2 - b_2}$$

$$a_3 - b_3 \neq 0 \quad \text{ise} \quad \lambda = \frac{z - b_3}{a_3 - b_3}$$

olurlar. Buradan

$i = 1, 2, 3$ için $a_i \neq b_i$ ise doğru denklemi $\dfrac{x - b_1}{a_1 - b_1} = \dfrac{y - b_2}{a_2 - b_2} = \dfrac{z - b_3}{a_3 - b_3}$ formunda dır.

$a_1 = b_1$ fakat $i = 2, 3$ için $a_i \neq b_i$ ise doğru denklemi

$$x = b_1 \;,\; \frac{y - b_2}{a_2 - b_2} = \frac{z - b_3}{a_3 - b_3} \quad \text{formundadır}$$

Son olarak $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ ve $a_3 \neq b_3$ ise doğru denklemi

$$x = b_1 \;,\; y = b_2 \;,\; z = b_3 + \lambda (a_3 - b_3)$$

$$\Rightarrow \quad x = b_1 \;,\; y = b_2 \;,\; z \in \mathbf{R} \quad \text{olur.}$$

Diğer kalan durumlar bunların benzeri olduğundan bu kalan durumları da siz inceleyiniz. Belki burada doğrunun denklemi demek doğru değildir, çünkü görüldüğü gibi düzlemden farklı olarak doğrunun belirleyici özelliği tek bir denklemden oluşmaz. Fakat biz neyin kastedildiğini bildiğimiz için "doğrunun denklemi" deyimini kullanacağız. Sonuç olarak burada uzayda verilen iki noktadan geçen doğruyu belirledik. İki örnekle konuyu pekleştirelim.

Örnek

(2, 1, -1) ve (3, 0, 2) noktalarından geçen doğruyu bulunuz.

Çözüm

Doğru üzerindeki keyfi $X = (x, y, z)$ noktasının koordinatları $\lambda \in \mathbf{R}$ olmak üzere

$$x = 3 + \lambda (3 - 2) = 3 + \lambda$$
$$y = 0 + \lambda (0 - 1) = -\lambda$$
$$z = 2 + \lambda (2 - (-1)) = 2 + 3\lambda$$

olur. Buradan sırasıyla

$$\lambda = x - 3$$
$$\lambda = -y$$
$$\lambda = \frac{z - 2}{3}$$

den doğru denklemi $x - 3 = -y = \frac{z - 2}{3}$ elde edilir.

Örnek

(4, -1, 1) ve (4, 5, 9) noktalarından geçen doğruyu bulunuz.

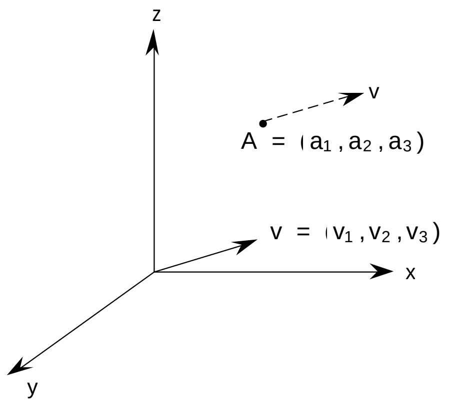
Çözüm

Doğru üzerindeki keyfi $X = (x, y, z)$ noktasının koordinatları $\lambda \in \mathbf{R}$ olmak üzere

$$x = 4$$
$$y = 5 + \lambda (5 - (-1)) = 5 + 6\lambda$$
$$z = 9 + \lambda (9 - 1) = 9 + 8\lambda$$

$$\Rightarrow \quad x = 4 \; , \; \frac{y - 5}{6} = \frac{z - 9}{8}$$ elde edilir.

Benzer tartışma ile bir noktadan geçen ve doğrultusu bir vektör ile verilen doğru denklemi de bulunabilir. Bir $A = (a_1, a_2, a_3)$ noktası, bir $v = (v_1, v_2, v_3)$ vektörü verilsin.



v vektörünün başlangıç noktasını A noktasına taşırsak A noktasından ve v vektörü doğrultusundaki doğru üzerindeki $X = (x, y, z)$ noktasının koordinatları

$$x = a_1 + \lambda v_1 \quad , \quad y = a_2 + \lambda v_2 \quad , \quad z = a_3 + \lambda v_3$$

olarak verilir.

Aslında biz P ve Q gibi iki noktadan geçen doğrunun denklemini yazarken P noktasından geçen ve $\overrightarrow{PQ}$ vektörü doğrultusundaki doğrunun denklemini yazıyoruz. Bu durum bize, bir doğru verildiğinde bir vektör doğrultusu elde etme imkanını verir. Bu doğrultular yardımıyla da doğruların biribirleriyle olan durumlarını inceleyebiliriz.

3. Uzayda Doğruların Biribirlerine Göre Durumları

Düzlemde verilen iki doğru ya da paralel ya da kesişirlerdi. Fakat uzayda iki doğrunun kesişmemesi paralel olması anlamına gelmez. Yani paralel olma düzlemde kesişmeme olmasına karşın uzayda başka bir tanıma gereksinim duyar.

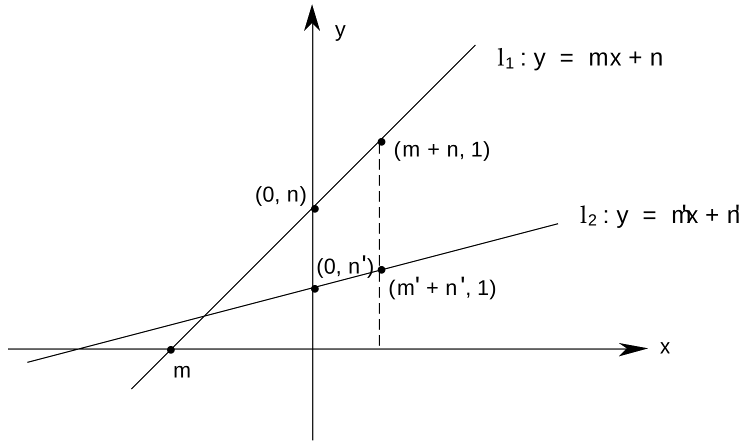
Tanım (Paralel Doğrular)

l_1 ve l_2 uzayda farklı iki doğru ve v ve w da bu doğrulara karşılık gelen doğrultu vektörlerinden ikisi olsunlar. Eğer uygun bir $\alpha \in \mathbf{R}$ için $v = \alpha w$ ise l_1 ve l_2 doğrularına **paralel doğrular** denir.

Hâlâ uzayda paralel olmayan ve kesişmeyen doğrular olabilir (hatta vardır) bu doğrulara da **aykırı doğrular** denir.

Son olarak eğer kesişen l_1 ve l_2 doğrularının doğrultu vektörleri dik iseler l_1 ve l_2 doğrularına **dik durumlu doğrular** denir. Bilindiği gibi v ve w gibi iki vektörün dik olması bunların skaler çarpımlarının $v \,.\, w = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ sıfır olması olarak tanımlanmıştı. Bu durumda dik durumlu olmanın iyi tanımlı olduğunu yani doğrultu vektörlerinin seçiminden bağımsız olduğunu göstermeyi size bırakıyoruz.

İsterseniz önce bu tanımlanan kavramların düzlemde bildiğimiz paralel ve dik olma kavramlarını nasıl etkilediğini görelim.



Bu doğrular üzerinde x in 0 ve 1 değerlerine karşılık gelen noktalar (0 ve 1 i kolay olsun diye seçtik, siz başka nokta seçebilirsiniz)

l_1 üzerinde $(n, 0)$, $(m + n, 1)$
l_2 üzerinde $(n', 0)$, $(m' + n', 1)$

den doğrultu vektörleri l_1 için $(m, 1)$ ve l_2 için $(m', 1)$ olurlar. Bu iki vektörün dik olması için

$$(m, 1) . (m', 1) = mm' + 1 = 0 \Leftrightarrow m\,m' = -1$$

olmalıdır. Bu durumda yeni dik doğrular kavramı düzlemde bildiğiniz eğimler çarpımının -1 olmasıdır. Paralellik ise

$$(m, 1) = \alpha (m', 1)$$
$$(m, 1) = (\alpha m', \alpha) \Leftrightarrow \begin{array}{l} m = \alpha m' \\ 1 = \alpha \qquad \Rightarrow \quad m = m' \end{array}$$

yine aynı şekilde düzlemde iki doğrunun paralelliği eğimlerin eşitliğidir.

Şimdi uzaydaki doğrularla ilgili bir kaç örnek yapalım.

Örnek

Uzayda $\frac{x}{2} = y = \frac{z - 1}{3}$ doğrusuna dik bir doğru yazınız

Çözüm

Doğru denkleminde $z = 4$ alırsak $y = 1$ ve $x = z$ olur. Yani $A = (2, 1, 4)$ doğru üzerinde bir nokta ve $z = 7$ alınırsa doğru üzerinde diğer bir nokta $B = (4, 2, 7)$ olur.

O halde $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 3)$ bir doğrultu vektörü olur. Öncelikle $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AX} = 0$ olacak şekilde bir $\overrightarrow{AX}$ vektörü bulalım. $X = (x, y, z)$ ise $\overrightarrow{AX} = (x - 2, y - 1, z - 4)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AX} &= 2(x - 2) + y - 1 + 3(z - 4) \\ &= 2x + y + 3z - 17 \end{aligned}$$

olur. $2x + y + 3z - 17 = 0$ denklemini sağlayan bir (x, y, z) sıralı üçlüsü işimizi görür. Açıkça $(x, y, z) = (0, 17, 0)$ seçilebilir. O halde $A = (2, 1, 4)$ ve $X = (0, 17, 0)$ noktalarından geçen doğru problemimizi çözer. Bu doğru üzerindeki keyfi $X = (x, y, z)$ noktasının koordinatları

$x = 2 - 2\lambda \quad , \quad y = 1 + 16\lambda \quad , \quad z = 4 - 4\lambda$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 1}{16} = \frac{z - 4}{-4}$ istenilen doğrulardan biridir.

Örnek

Bir önceki örnekte verilen doğruya paralel bir doğru yazınız.

Çözüm

Bunun için de yukarıda bulduğumuz $\overrightarrow{AB}$ vektörü doğrultusunda soruda adı geçen doğrudan farklı bir doğru vermek yeterlidir. Örneğin $(0, 0, 0)$ noktası $\frac{x}{2} = y = \frac{z - 1}{3}$ doğrusu üzerinde değildir. O halde $(0, 0, 0)$ noktasından geçen ve $AB = (2, 1, 3)$ vektörünün doğrultusundaki doğru problemimizi çözer. Bu doğru $\lambda \in \mathbf{R}$ için

$(x, y, z) = (2\lambda, \lambda, 3\lambda)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$ doğrusu $\frac{x}{2} = y = \frac{z - 1}{3}$ doğrusuna paraleldir.

4. Uzayda Düzlem

Uzayda düzlem de tıpkı uzayda doğrular gibi farklı iki nokta ya da bir nokta bir doğrultu vektörü ile tanımlanabilir. Matematiksel bir tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım

Uzayda bir A noktası ve bir v vektörü verilsin. Bu durumda

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \left(\vec{v}\right) . \left(\overrightarrow{AX}\right) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A dan geçen ve v vektörü ile belirlenen **düzlem** denir.

O halde A dan geçen düzlem A noktasında v ye dik vektörlerin oluşturduğu kümedir. Bu tanımdan sonra genel bir düzlem denklemi şu şekilde elde edilebilir.

$A = (a_1, a_2, a_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olsunlar.

$$\overrightarrow{AX} = (x - a_1 , y - a_2 , z - a_3)$$

$$\vec{v} \,.\, \overrightarrow{AX} = v_1 (x - a_1) + v_2 (x - a_2) + v_3 (x - a_3)$$

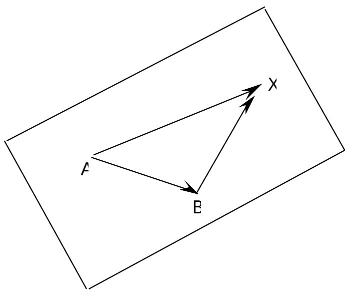
$$= v_1 x + v_2 y + v_3 z - a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3 = 0$$

olur. O halde düzlem

$$v_1 x + v_2 y + v_3 z - a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$$

denklemiyle verilir. Burada anılan v vektörüne düzlemin bir **normali** denir.

Bu durumda v normal vektörünün A noktasının seçilişinden bağımsız olduğunu göstermemiz gerekir. Yani düzlemde başka bir B noktası alırsak $\vec{v} \,.\, \overrightarrow{BX} = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Fakat



şeklinden de görüldüğü gibi $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX}$ dür

Bunu düzlem denklemin de yerine koyarsak

$$\vec{v} \,.\, \overrightarrow{AX} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{v} \,.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{v} \,.\, \overrightarrow{AB} + \vec{v} \,.\, \overrightarrow{BX} = 0$$

Düzlemdeki her nokta için $\vec{v} \,.\, \overrightarrow{AX} = 0$ olduğundan $X = B$ için de bu doğrudur

Yani $\vec{v} \,.\, \overrightarrow{AB} = 0$ dır.

O halde buradan

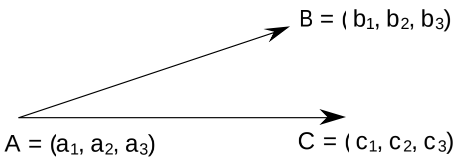
$$\vec{v} \,.\, \overrightarrow{BX} = 0$$

elde edilir. Diğer yandan eğer bir $\vec{v}$ vektörü normal vektör ise bunun bir kat olan $\alpha \,.\, \vec{v}$ vektörü de normaldir. Çünkü

$$\left(\alpha \,.\, \vec{v}\right) .\; \overrightarrow{AX} = \alpha \left(\vec{v} \,.\, \overrightarrow{AX}\right) = 0$$

5. Üç Noktadan Geçen Düzlemin Denklemi

Bir noktadan geçen bir düzlem o noktada verilen bir normal ile tek türlü belirgin olduğu için bir normal belirleyebildiğimiz durumlarda bir düzlem denklemi elde edebiliriz. Bunun en basit örneklerinden birisi verilen aynı doğru üzerinde bulunmayan üç nokta yardımıyla bu üç noktadan geçen düzlemi inşa etmektir. Eğer alınan üç nokta bir doğru üzerinde ise bu üç noktadan geçen düzlemlerin sayısı sonsuz tanedir. Şimdi uzayda aynı bir doğru üzerinde bulunmayan üç nokta alalım.



$\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörlerini şekildeki gibi oluşturalım. Uzayda vektörler konusunda yaptığımız gibi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektörü hem $\overrightarrow{AB}$ hem de $\overrightarrow{AC}$ vektörlerine diktir. Bu durumda $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektörü normal vektör olarak alınabilir. $\vec{n}$ normal vektörü göstermek üzere

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \right)$$

vektörüdür. Diğer taraftan A, B ve C noktaları tarafından belirlenen düzlemde ($\vec{n}$ vektörünün varlığı düzlemin varlığını garanti eder) keyfi bir X noktası için $\overrightarrow{AX} = (x - a_1 , y - a_2 , z - a_3)$ vektörü de normal vektöre dik olacaktır. Yani $\vec{n} . \overrightarrow{AX} = 0$ olmalıdır. $\vec{n} . \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ yazarsak A, B ve C noktalarından geçen düzlemin denklemi

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) . \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AX} . \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

olur. Bu ise bizim daha önceden bildiğimiz karma çarpımdan başka bir şey değildir. O halde açık olarak

$$\overrightarrow{AX} . \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \det \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & b_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{elde edilir}$$

Örnek

Uzayda $(2, 1, -1)$, $(1, 0, 1)$ ve $(0, 0, 1)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm

$A = (2, 1, -1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 0, 1)$ ve düzlemin keyfi noktasını $X = (x, y, z)$ olarak alırsak:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 2),\ \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 2),\ \overrightarrow{AX} = (x - 2, y - 1, z + 1)$$

olur. O halde düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z + 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $(x - 2)(- 2 + 2) + (1 - y)(-2 + 4) + (z + 1)(1 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow$ $2(1 - y) - (z + 1) = 0 \Leftrightarrow - 2y - z + 1 = 0$ olarak elde edilir.

Buraya kadar yapılan değişik tartışmalar düzlemde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ve $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ olmak üzere

$$ax + by + cz + d = 0$$

denklemiyle verilen kümenin bir düzlem olacağı hissini uyandırmaktadır. Bu kümenin bir düzlem olduğunu göstermek için bir normal vektörünün var olduğunu göstermek yeterlidir.

$ax + by + cz + d = 0$ düzleminin normali denkleminden (a, b, c) vektörün olduğu izlemini uyandırır. Gerçekten de (a, b, c) vektörü verilen düzlemin normalidir.

$X = (x_1, y_1, z_1)$ ve $Y = (x_2, y_2, z_2)$ düzlemin keyfi iki noktası olsunlar.

$\overrightarrow{XY} = (x_2 - x_1,\ - y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$ olur. (a, b, c) vektörünün normal vektör olmas

için gerekli ve yeterli koşul $(a, b, c) . \overrightarrow{XY} = 0$ olmasıdır.

$$\begin{aligned}(a, b, c) . \overrightarrow{XY} &= a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) \\ &= \underbrace{(ax_2 + by_2 + cz_2 + d)}_{0} - \underbrace{(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)}_{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

olur ki bu (a, b, c) vektörünün

$$ax + by + cz + d = 0$$

düzleminin normal vektörü olması demektir.

Şimdi sayısal bir örnekle bunu daha iyi anlayalım.

Örnek

$x + y - z + 1 = 0$ düzleminin normal vektörlerinden birisini yazınız.

Çözüm

Bunun için düzlem denklemini sağlayan üç nokta almamız yeterlidir. Hemen görülebileceği gibi

$$A = (-1 , 0 , 0) \quad , \quad B = (0 , -1 , 0) \quad , \quad C = (0 , 0 , 1)$$

noktaları düzlem denklemini sağlarlar. Bu durumda

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (+1 , -1 , 0) \times (+1 , 0 , 1)$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1 , -1 , 1)$$

olur. Ya da daha kısa bir şekilde yukarıda verilen tartışmadan $ax + by + cz + d = 0$ düzleminin bir normal vektörü (a, b, c) olduğundan $x + y - z + 1 = 0$ düzleminin bir normal vektörü (1, 1, -1) dir.

6. Düzlemlerin Biribirlerine Göre Durumları

Uzayda verilen iki düzlem

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{aligned}$$

olsunlar.

Bu denklemlerde $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \lambda$ ise

$$a = \lambda a' \quad , \quad b = \lambda b' \quad , \quad c = \lambda c'$$

olur. Dolayısıyla birinci denklem

$$\lambda\,(a'x + b'y + c'z) + d \;=\; 0$$

olur.

İkinci denklemde $a'x + b'y + c'z = -d'$ olduğundan $\lambda \cdot d' + d = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{d}{d'}$ olmalıdır. Eğer $\frac{d}{d'} \neq \lambda$ ise bu denklem sisteminin ortak çözümü yoktur. Yani bu iki düzlemin arakesiti boştur. Eğer $\frac{d}{d'} = \lambda$ ise bu iki düzlem aynı düzlemlerdir.

Eğer $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ özelliği sağlanmıyorsa bu denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır. Bu çözüm kümesi de bir doğru olmalıdır. Çünkü eğer uzayın iki noktası bir düzlem üzerinde ise bu iki noktadan geçen doğru da bu düzlem üzerindedir. Bu şu şekilde görülebilir: $P = (p_1, p_2, p_3)$ ve $Q = (q_1, q_2, q_3)$ noktaları $ax + by + cz + d = 0$ düzlemi üzerinde olsunlar. Bu durumda $\lambda \in \mathbf{R}$ olmak üzere $\lambda P + (1 - \lambda)\, Q$ noktaları kümesi de düzlem denklemini sağlar.

$$x = \lambda p_1 + (1 - \lambda)q_1 \quad , \quad y = \lambda p_2 + (1 - \lambda)q_2 \quad , \quad z = \lambda p_3 + (1 - \lambda)q_3$$

değerleri düzlem denkleminde yerine konulursa

$$a\,(\lambda p_1 + (1 - \lambda)q_1) \;+\; b\,(\lambda p_2 + (1 - \lambda)q_2) \;+\; c\,(\lambda p_3 + (1 - \lambda)q_3) \;+\; d \;=\; 0$$

$$\lambda\,(ap_1 + bp_2 + cp_3) \;+\; (1 - \lambda)\,(aq_1 + bq_2 + cq_3) \;+\; d \;=\; 0$$

P ve Q düzlem üzerinde olduğundan

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 \;=\; aq_1 + bq_2 + cq_3 \;=\; -d$$

dir.

$$\lambda\,(-d) \;+\; (1 - \lambda)\,(-d) \;+\; d \;=\; 0$$

$$0 \;=\; 0$$

olur. Bu ise $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ için $\lambda P + (1 - \lambda)\, Q$ noktalarının yani P ve Q dan geçen doğrunun düzlem denklemini sağlaması yani doğrunun düzlem üzerinde bulunması demektir.

Örnek

$x+y-4z=0$ ve $x+2y=0$ düzlemlerinin biribirlerine göre durumlarını bulunuz.

Çözüm

x, y ve z nin katsayıları orantılı olmadığından bu iki düzlem paralel değildir. O halde bir doğru boyunca kesişirler. Bu durumda $x = \lambda$ dersek

$$\lambda + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{\lambda}{2}$$

ve

$$\lambda - \frac{\lambda}{2} - 4z = 0 \Rightarrow z = \frac{\lambda}{8}$$

Bu durumda arakesit doğrusunun denklemi $x = -2y = -8z = \lambda$ olarak bulunur.

Şimdi uzayda üç düzlemin biribirlerine göre durumlarını inceleyelim:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$$

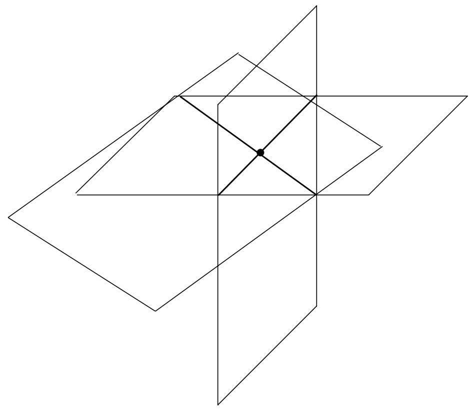
uzayda üç düzlem olsunlar. Bu üç düzlem denkleminin oluşturduğu üç bilinmeyenli denklemin

- tek çözümü olabilir,
- sonsuz çözümü olabilir,
- çözümü olmayabilir.

Bu durumlar ise

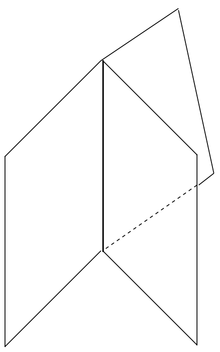
$$\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

tek bir çözüm vardır. Bu durum kabaca



şeklindeki gibi olabilir.

Diğer durum ise bu üç düzlemde bir doğru boyunca kesişebilir. Kabaca



şeklindeki gibi olur. Bu durum ise sistemin en az bir çözümü var ve bu düzlemlerden en az iki tanesi farklı olduğunda

$$\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

durumunda mümkündür.

Kalan durum ise sistemin çözümünün olmaması durumudur. Bu üç düzlemin ara kesit doğruları paralel ya da aykırı olması durumudur.

Örnek

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & x + 2y + z = 0 \\ \text{II.} & 2x + y - 2z = 1 \\ \text{III.} & -x + y - 2z = -1 \end{array}\right\}$$ düzlemlerinin biribirleriyle olan konumlarını inceleyiniz.

Çözüm

Katsayılar matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\,(-4\,-2) + (2+1) = 15 \neq 0$$

olduğundan sistemin tek çözümü vardır. Bu çözüm Kramer yöntemiyle:

$$x = \frac{\det \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{15} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{15} = -\frac{1}{3}$$

$$z = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{15} = 0$$

olur. Yani bu üç düzlem $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ noktasında kesişirler.

I ve II nolu düzlemler

$$x + 2y + z = 0$$
$$2x + y - 2z = 1$$

$z = \lambda$ denilirse

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = \lambda \\ 2x + y = 1 + 2\lambda \end{array}\right\} \text{ denklem sisteminder}$$

$$y = -\frac{1+4\lambda}{3} \quad \text{ve} \quad x = \frac{2+5\lambda}{3}$$

elde edilir.

O halde I ve II nolu düzlemler

$$\frac{3x-2}{5} = \frac{-3y-1}{4} = z$$

doğrusu boyunca kesişir.

II ve III nolu düzlemler ise

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 1 \\ -x + y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

yine $z = \lambda$ denilirse

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 1 + 2\lambda \\ -x + y &= -1 + 2\lambda \end{aligned}\right\} \text{ denklem sisteminder}$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{ve} \quad y = 2\lambda - \frac{1}{3}$$

elde edilir.

O halde bu iki düzlem

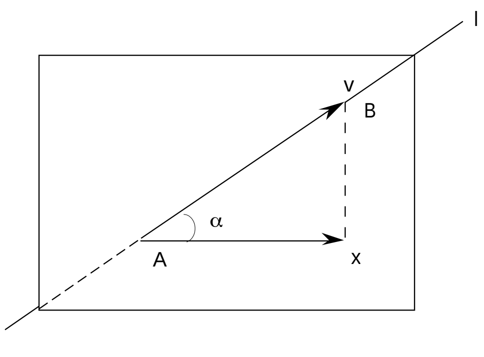
$$x = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{3y+1}{6} = z$$

doğrusu boyunca kesişir.

I ve III nolu düzlemlerin biribirlerine göre durumlarını da siz inceleyiniz.

7. Bir Düzlemle Bir Doğru Arasındaki Açı

Eğer bir doğru ile bir düzlemin ara kesiti tek bir noktadan oluşuyorsa, bu doğru ile düzlem arasındaki açıdan bahsedilebilir. Gerçi doğrunun düzlemle kesişmemesi durumunda aralarındaki açıyı sıfır olarak tanımlayabiliriz. Şimdi bir π düzlemi ile bir l doğrusu aşağıdaki gibi verilsin.



A düzlemle doğrunun arakesit noktası olmak üzere $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ doğrultu vektörünü oluşturalım. $\vec{v}$ vektörünün dik izdüşümü olan AB vektörü ile $\vec{v}$ vektörü arasındaki açıya l doğrusu ile π düzlemi arasındaki açı denir. Dik izdüşüm alındığı için $\overrightarrow{AB}$ vektörü düzlemin bir normalidir. Yani yüzey üzerinde $\overrightarrow{XB} . \overrightarrow{AX}$ olacak şekilde tek bir X noktası vardır. Böylece $\overrightarrow{AX}$ vektörü inşa edilmiş olur. Öte yandan AB ve $\overrightarrow{AX}$ vektörleri arasındaki α açısı da

$$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AX} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AX}| \cos\alpha$$

formülünden hesaplanır. Bir örnekte konuyu daha açık hale getirelim.

Örnek

Uzayda $2x - y + z = 0$ düzlemi ile $\frac{x - 1}{3} - \frac{y - z}{2} = \frac{z + 1}{12}$ doğrusu arasındaki açıyı hesaplayınız.

Çözüm

Doğru denkleminden $\left.\begin{array}{l} x - 1 = 3(z + 1) \\ y - 2 = 2(z + 1) \end{array}\right\}$ elde edilir.

Buradan

$$\begin{aligned} x - 3z &= 4 \\ y - 2z &= 4 \\ 2x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümü düzlem ile doğrunun arakesitini verir. Bu sistemin çözümü $x = \frac{8}{5}$, $y = \frac{12}{5}$, $z = -\frac{4}{5}$ elde edilir. Yani $A = \left(\frac{8}{5}, \frac{12}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ olur. Doğru üzerindeki bir B noktası da $B = (1, 2, -1)$ seçilebilir. X düzlemde $X = (x, y, z)$ noktası olsun. $(2, -1, 1)$ vektörü düzlemin normali olduğundan

$$\overrightarrow{XB} = (1 - x, -2 - y, -1 - z) \text{ ve } \overrightarrow{AX} = (x - \frac{8}{5}, y - \frac{12}{5}, z + \frac{4}{5})$$

$$\overrightarrow{XB} = \alpha\vec{n}$$

$$(1 - x, -2 - y, -1 - z) = \alpha(2, -1, 1)$$

$$\left.\begin{array}{lll} 1 - x = 2t & \Rightarrow & x = 1 + 2t \\ -2 - y = -t & \Rightarrow & y = t - 2 \\ -1 - z = t & \Rightarrow & z = t - 1 \end{array}\right\} \text{ olur}$$

Bu durumda

$$\overrightarrow{AX} = \left(1 + 2t - \frac{8}{5},\ t - 2 - \frac{12}{5},\ t - 1 + \frac{4}{5}\right) = \left(2t - \frac{3}{5},\ t - \frac{22}{5},\ t - \frac{1}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{XB} = (2t, -t, t)$$

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{XB} = 2t\left(2t - \frac{3}{5}\right) + \left(t - \frac{22}{5}\right)(-t) + t\left(t - \frac{1}{5}\right)$$

$$= t\left\{4t - \frac{6}{5} - t + \frac{22}{5} + t - \frac{1}{5}\right\}$$

$$= t(4t - 3)$$

olur.

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{XB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \text{ya da} \quad t = \frac{3}{4}$$

$(0, 0, 0)$ vektörü her vektöre dik olduğundan $t = 0$ a karşılık gelen çözüm apaçıktır.

$t = \frac{3}{4}$ aranılan çözümdür. O halde

$$\overrightarrow{AX} = \left(2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{5},\ \frac{3}{4} - \frac{22}{5},\ \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{18}{20},\ -\frac{73}{20},\ \frac{11}{20}\right)$$

olur.

$$\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{18}{20}\left(1 - \frac{8}{5}\right) = \frac{73}{20}\left(2 - \frac{12}{5}\right) + \frac{11}{20}\left(-1 + \frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{81}{100}$$

olur.

$$\left|\overrightarrow{AX}\right| = \sqrt{\left(\frac{18}{20}\right)^2 + \left(\frac{73}{20}\right)^2 + \left(\frac{11}{20}\right)^2} = \frac{1}{20}\sqrt{5774}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{14}$$

ve $\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AX}\right| \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\alpha$

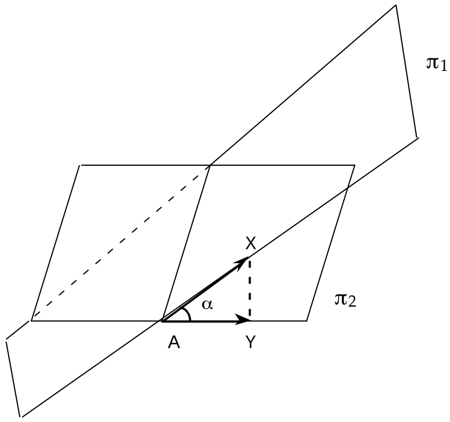
$$= \frac{81}{100} = \frac{1}{100}\sqrt{14}\ \sqrt{5774}\ \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{81}{\sqrt{14}\,\sqrt{5774}} = \frac{81}{2}\,\frac{1}{\sqrt{20209}}$$

elde edilir.

Ayrıca bu örnekle bir doğrunun bir düzlem üzerine dik izdüşümünün nasıl bulunacağını da görmüş olduk.

Benzer yolla iki düzlem arasındaki açıda tanımlanabilir.



π_1 ve π_2 iki düzlem ve A bu iki düzlemin arakesit noktalarından birisi, x düzlemlerin birisi (örneğin π_1) üzerinde bir nokta ve $\overrightarrow{AY}$ vektörü de $\overrightarrow{AX}$ vektörünün π_2 düzlemine dik izdüşümü olsun. Bu durumda π_1 ve π_2 arasındaki açı $\overrightarrow{AX}$ ve $\overrightarrow{AY}$ vektörleri arasındaki açıya denir. Bunun da detayları doğru ile düzlem arasındaki açıyla aynı şekilde öncelenebilir. Bunu da size bırakıyoruz. Bununla birlikte iki düzlem arasındaki açının bu düzlemlerin normalleri arasındaki açıya eşit olduğunu da gösteriniz.

Özet

Bu bölümde düzlem için geliştirdiğimiz analitik geometri modelinin bir benzerini üç boyutlu uzay için geliştirdik. Fakat bu modelin Öklid aksiyomlarını sağladığını kesin bir şekilde göstermedik. Bunu siz de fazla zorlanmadan gösterebilirsiniz. Bu modelde doğrulara ilave olarak düzlem olarak adlandırılan yeni nesneler tanımlayıp bu nesnelerin biribirlerine göre olan durumlarını sınıflandırdık.

Değerlendirme Soruları

1. A = (2, 3, 1) ve B = (1, -2, 0) noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız.

   A. $x - 1 = \frac{y + 2}{5} = z$

   B. $(\lambda + 2, \lambda 2 + 3, \lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$

   C. $\frac{x - 1}{5} = y + 2 = z$

   D. $\left(\lambda + 3, \frac{2\lambda + 2}{5}, \lambda\right)$, $\lambda \in \mathbf{R}$

   E. $2(x - 1) = -2(y - 3) = z$

2. A = (1, -1, 3) noktasından geçen v = (1, 0, 1) vektörü doğrultusundaki doğrunun denklemi nedir?
   A. $x - 1 = z - 3$
   B. $(2 + \lambda, \lambda, \lambda)$
   C. $y = -1, \ x - 1 = z - 3$
   D. $x = 1, \ y + 1 = z - 3$
   E. $z = 0, \ x + y = 0$

3. $x - 2y + z + 4 = 0$ düzleminin normalini bulunuz.
   A. (1, -2, 4)
   B. (-1, 2, 4)
   C. (1/2, -1, 1/2)
   D. (1, -2, 1/2)
   E. (1/2, -2, 1)

4. A = (1, 0, 1) , B = (0, 1, -1) , C = (1, 1, 0) noktalarından geçen düzlem denklemini yazınız.
   A. $x + y - z = 0$
   B. $x + y + z = 0$
   C. $x - y + z = 0$
   D. $x - y - z = 0$
   E. $y = 0$

5. $\frac{x - 1}{2} = 1 - y = \frac{z - 1}{3}$ ve $2(x - 1) = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 1}{4}$ doğrularının ara kesiti nedir?
   A. (0, 1, 1)
   B. (1, 0, 1)
   C. (1, 1, 0)
   D. (1, 1, 1)
   E. (1, 1, -1)

6. $2x - 4y + z = 0$ ve $x - y = 3z - 1 = 0$ düzlemlerinin arakesiti nedir?

A. $\left(\lambda\ ,\ \frac{1+5\lambda}{11}\ ,\ 2\left(\frac{2-\lambda}{11}\right)\right)$

B. $(\lambda\ ,\ 2\lambda + 3\ ,\ 4 - \lambda)$

C. $\left(\lambda\ ,\ -\frac{1+5\lambda}{11}\ ,\ \frac{2-\lambda}{11}\right)$

D. $\left(2\lambda\ ,\ \frac{1+5\lambda}{11}\ ,\ 2\left(\frac{2-\lambda}{11}\right)\right)$

E. $(\lambda\ ,\ 1 + 5\lambda\ ,\ -2(2 - \lambda))$

7. $x - 1 = 1 - y = \frac{z-1}{2}$ ve $x = 1\ ,\ y - 1 = 2(z - 1)$ doğruları arasındaki açıyı bulunuz.

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

E. π

8. $x - z = 0$ ve $y + z = 0$ düzlemleri arasındaki açıyı bulunuz.

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{5\pi}{6}$

E. $\frac{2\pi}{3}$

9. $(1\ ,0\ ,1)$ noktasından geçen ve $\vec{n} = (0\ ,1\ ,-1)$ vektörüne dik olan düzlem denklemini bulunuz.

A. $y - z + 1 = 0$
B. $y - z = 1$
C. $x + y - z = 0$
D. $2x + y - z = 0$
E. $x + y - z = 1$

10. Aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

a) $x + y - 2z = 5$ bir düzlem denklemidir.

b) $\dfrac{x + y}{z} = 3$ bir düzlem denklemidir.

c) $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 1}{5} = \dfrac{z - 1}{4} = 7$ bir doğru denklemidir

A. { c }
B. { b , c }
C. { a , b }
D. { a , b , c }
E. { a , c }

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. A 2. C 3. C 4. D 5. D 6. A 7. D 8. E 9. A 10. C